Exercice 33 p. 150.

1. À l'aide de la calculatrice, $\mathrm{PGCD}(32, 28) = 4$ et $4 \mid 8$ donc, par théorème, $32x + 28y = 8$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. À l'aide de la calculatrice, $\mathrm{PGCD}(46, 51) = 1$ et $1 \mid 1$ donc, par théorème, $46x + 51y = 1$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
3. À l'aide de la calculatrice, $\mathrm{PGCD}(222, 72) = 6$ et $6 \nmid 8$ donc, par théorème, $222x - 72y = 8$ ne possède pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
4. À l'aide de la calculatrice, $\mathrm{PGCD}(7, 32) = 1$ et $1 \mid -5$ donc, par théorème, $7x - 32y = -5$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 35 p. 150. Ici, on cherche seulement les solutions dans $\mathbb{N}$. Comme $17 \times 5 = 85$, pour tout entier $u \geqslant 5$ et tout $v \in \mathbb{N}$, $17u + 3v \geqslant 85$ donc une solution $(u\,;v) \in \mathbb{N}^2$ de $17x + 3y = 72$ vérifie $u \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$. Réciproquement, si $17 \times 0 + 3v = 72$ alors $v = 24$, si $17 \times 1 + 3v = 72$ alors $v = \frac{55}{3} \notin \mathbb{N}$, si $17 \times 2 + 3v = 72$ alors $v = \frac{38}{3} \notin \mathbb{N}$, si $17 \times 3 + 3v = 72$ alors $v = 7$ et si $17 \times 4 + 3v = 72$ alors $v = \frac{4}{3}$. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $17x + 3y = 72$ est $\{(0\,;24)\ ;(3\,;7)\}$.

Exercice 37 p. 150.

1. **a.** Utilisons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 21 &= 16 + 5 \\ 16 &= 3 \times 5 + 1 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{PGCD}(21, 16) = 1$ et $1 = 16 - 3 \times 5 = 16 - 3 \times (21 - 16) = 4 \times 16 - 3 \times 21$. Ainsi, $(4\,;-3)$ est une solution de $16x + 21y = 1$.

b. En multipliant par 797, on en déduit que $16 \times 3188 - 21 \times 2391 = 797$ donc $(3188\,;-2391)$ est une solution de (E).

c. Soit $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E). Alors, $16u + 21v = 797 = 16 \times 3188 - 21 \times 2391$ donc $16(u - 3188) = 21(-v - 2391)$. Ainsi, 21 divise $16(u - 3188)$ donc, comme 21 et 16 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 21 divise $u - 3188$. Ainsi, il existe un entier k tel que $u - 3188 = 21k$ i.e. $u = 3188 + 21k$. Or, $16(u - 3188) = 21(-v - 2391)$ donc $16 \times 21k = 21(-v - 2391)$ i.e. $16k = -v - 2391$ et donc $v = -2391 - 16k$. Ainsi, toute solution de (E) est de la forme $(3188 + 21k\,;-2391 - 16k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $u = 3188 + 21k$ et $v = -2391 - 16k$. Alors,

$$\begin{aligned} 16u + 21v &= 16(3188 + 21k) + 21(-2391 - 16k) \\ &= 16 \times 3188 - 21 \times 2391 + 16 \times 21k - 21 \times 16k \\ &= 797 \end{aligned}$$

donc $(u\,;v)$ est solution de (E).
On conclut donc que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{(3188 + 21k\,;-2391 - 16k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Notons u le nombre de menus « plat-dessert » et v le nombre de menu « entrée-plat-dessert » servis. Alors, $16u + 21v = 797$ donc il existe un entier k tel que $u = 3188 + 21k$ et $v = -2391 - 16k$. De plus, par définition, $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$ donc $3188 + 21k \geqslant 0$ et $-2391 - 16k \geqslant 0$ i.e. $k \geqslant -\frac{3188}{21}$ et $k \leqslant -\frac{2391}{16}$. Comme k est entier, on en déduit que $k \in \{-151\,;-150\}$ donc $(u\,;v) \in \{(17\,;25)\ ;(38\,;9)\}$. Ainsi, le restaurateur a servi soit 17 menus « plat-dessert » et 25 menus « entrée-plat-dessert » soit 38 menus « plat-dessert » et 9 menus « entrée-plat-dessert ».

Exercice 40 p. 150. Une équation cartésienne de (d) est $2x + 3y = 9$. Considérons l'équation diophantienne $(E) : 2x + 3y = 9$. Comme $2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$, 2 et 3 sont premiers entre eux et, de plus, en multipliant par 9, $2 \times (-9) + 3 \times 9 = 9$ donc $(-9\,; 9)$ est une solution de (E).

Soit $(u\,; v) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E). Alors, $2u + 3v = 9 = 2 \times (-9) + 3 \times 9$ donc $2(u + 9) = 3(-v + 9)$. Ainsi, 3 divise $2(u + 9)$ et comme 2 et 3 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 3 divise $u + 9$. Ainsi, il existe un entier k tel que $u + 9 = 3k$ i.e. $u = -9 + 3k$. Or, $2(u + 9) = 3(-v + 9)$ donc $2 \times 3k = 3(-v + 9)$ i.e. $2k = -v + 9$ donc $v = 9 - 2k$. Ainsi, toute solution de (E) est de la forme $(-9 + 3k\,; 9 - 2k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $u = -9 + 3k$ et $v = 9 - 2k$. Alors,

$$2u + 3v = 2(-9 + 3k) + 3(9 - 2k) = 2 \times (-9) + 3 \times 9 + 2 \times 3k - 3 \times 2k = 9$$

donc $(u\,; v)$ est solution de (E).

On conclut que l'ensemble des solution de (E) est $\{(-9 + 3k\,; 9 - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ donc les points de (d) a coordonnées entières sont les points $M_k\,(-9 + 3k\,; 9 - 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 41 p. 150

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide,

$$\begin{aligned} 33 &= 20 + 13 \\ 20 &= 13 + 7 \\ 13 &= 7 + 6 \\ 7 &= 6 + 1 \end{aligned}$$

donc20 et 33 sont premiers entre eux et ainsi, il existe des entiers u et v tels que $20u + 33v = 1$. Plus précisément, en remontant l'algorithme d'Euclide,

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 6 \\ &= 7 - (13 - 7) = 2 \times 7 - 13 \\ &= 2 \times (20 - 13) - 13 = 2 \times 20 - 3 \times 13 \\ &= 2 \times 20 - 3(33 - 20) = 5 \times 20 - 3 \times 33 \end{aligned}$$

Ainsi, le couple $(u\,; v) = (5\,; 3)$ convient. On peut donc mettre dans la bassine $5 \times 20 = 100$ cL avec le premier récipient puis enlever $3 \times 33 = 99$ cL avec le second et il restera alors 1 cL dans la bassine. (Bon, cela reste tout de même une vue de l'esprit car dans la pratique, je doute qu'on puisse être aussi précis !)

2. Il suffit de réaliser 314 fois ce qui précède. À chaque fois, on ajoute 1 cL, de plus, donc à la fin, on aura dans la bassine 314 cL i.e. 3,14 L. De plus, il n'y aura pas de problème de contenance car au maximum à chaque étape on doit ajouter 5×20 cL $= 1$ L donc il n'y aura jamais plus de $3{,}13 + 1 = 4{,}13$ L d'eau dans la bassine.

Exercice 79 p. 155

1. Si on note p le nombre de tours construites par Sarah et q le nombre de tours construites par Quentin alors $n = 16p + 4$ et $n = 25q + 5$ donc $n \equiv 4\ [16]$ et $n \equiv 5\ [25]$.

2. **a.** Tous les diviseurs autres que 1 de 16 sont pairs et ne divisent donc par 25. Ainsi, 16 et 25 sont premiers entre eux donc, par le théorème de Bézout, il existe $(u\,; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $16u + 25v = 1$.

   b. Par définition, $16u = 1 - 25v$ donc $n_0 = 5(1 - 25v) + 4 \times 25v = 5 - 25v \equiv 5\ [25]$ et $25v = 1 - 16u$ donc $n_0 = 5 \times 16u + 4(1 - 16u) = 4 + 16u \equiv 4\ [16]$. Ainsi, n_0 est bien une solution de (S).

c. À l'aide de l'algorithme d'Euclide,

$$\begin{aligned} 25 &= 16 + 9 \\ 16 &= 9 + 7 \\ 9 &= 7 + 2 \\ 7 &= 3 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \times 2 = 7 - 3(9 - 7) = 4 \times 7 - 3 \times 9 \\ &= 4(16 - 9) - 3 \times 9 = 4 \times 16 - 7 \times 9 \\ &= 4 \times 16 - 7(25 - 16) = 11 \times 16 - 7 \times 25 \end{aligned}$$

Ainsi, $couple 11 - 7$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $16x + 25y = 1$ donc, grâce à la question précédente, $n_0 = 5 \times 16 \times 11 + 4 \times 25 \times (-7) = 180$ est une solution particulière de (S).

3. a. Supposons que n est solution de (S). Alors $n \equiv 4$ [16] et $n \equiv 5$ [25]. Or, $n_0 \equiv 4$ [16] et $n_0 \equiv 5$ [25] donc par transitivité et symétrie de la congruence, $n \equiv n_0$ [16] et $n \equiv n_0$ [25]. Réciproquement, si n est un entier tel que $n \equiv n_0$ [16] et $n \equiv n_0$ [25] alors, comme $n_0 \equiv 4$ [16] et $n_0 \equiv 5$ [25], par transitivité de la congruence, $n \equiv 4$ [16] et $n \equiv 5$ [25]. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0 \ [16] \\ n \equiv n_0 \ [25] \end{cases} .$$

b. Si n est solution de (S) alors, par la question précédent, 16 divise $n - n_0$ et 25 divise $n - n_0$ donc, comme 25 et 16 sont premiers entre eux, 16×25 divise $n - n_0$ i.e. 400 divise $n - n_0$ donc $n \equiv n_0$ [400]. Réciproquement, si n est un entier tel que $n \equiv n_0$ [400] alors, comme 16 et 25 divise 400, $n \equiv n_0$ [16] et $n \equiv n_0$ [25].

Ainsi, on conclut que n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0$ [400].

c. D'après les questions précédentes, le nombre N de pièces est de la forme $N = 180 + 400k$ où $k \in \mathbb{Z}$. Or, $400 \leqslant N \leqslant 800$ donc $400 \leqslant 180 + 400k \leqslant 800$ donc $\frac{11}{20} \leqslant k \leqslant \frac{31}{20}$. Comme k est entier, on en déduit que $k = 1$ donc $N = 580$.

Exercice 81 p. 155

1. Comme 7 et 11 sont premiers entre eux (résultat qu'on obtient, par exemple, à l'aide de la calculatrice ou en remarquant que $2 \times 11 - 3 \times 7 = 1$), quel que soit l'entier $n > 0$, l'équation $11x + 7y = n$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. Comme $n > 0$, on ne peut pas avoir $x < 0$ et $y < 0$. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, la transaction de n euros peut se faire en payant x jetons rouges et y jetons bleus, si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, elle peut se faire en payant x jetons rouges et avec un rendu de monnaie de y jetons bleus et si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, elle peut se faire en payant y jetons bleus et avec un rendu de monnaie de x jetons rouges. (Là encore, il s'agit d'une vue de l'esprit car il faudrait imaginer posséder une infinité de jetons de chaque couleur pour pouvoir faire toutes les montants possibles.)

2. Soit un entier $n \geqslant 77$. La question revient à se demander si l'équation $(E_n) : 11x + 7y = n$ possède des solutions dans $\mathbb{N}^2$. Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, (E_n) possède au moins une solution $(u_0 ; v_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Supposons que $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de (E_n). Alors, $11u + 7v = n = 11u_0 + 7v_0$ donc $11(u - u_0) = 7(-v + v_0)$. Ainsi, 7 divise $11(u - u_0)$ et 7 et 11 sont premiers entre eux donc, par le théorème de Gauss, 7 divise $u - u_0$. Dès lors, il existe un entier k tel que $u - u_0 = 7k$ i.e. $u = u_0 + 7k$. Or, $11(u - u_0) = 7(-v + v_0)$

donc $11 \times 7k = 7(-v + v_0)$ i.e. $11k = -v + v_0$ et ainsi $v = v_0 - 11k$. Ainsi, toute solution de (E_n) est de la forme $(u_0 + 7k\,; v_0 - 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, $u = u_0 + 7k$ et $v = v_0 - 11k$ alors

$$11u + 7v = 11(u_0 + 7k) + 7(v_0 - 11k) = 11u_0 + 7v_0 + 77k - 77k = n$$

donc $(u\,; v)$ est solution de (E_n).
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_n) est $\{(u_0 + 7k\,; v_0 - 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $u_0 + 7x \geqslant 0$ d'inconnue x est $\left[-\frac{u_0}{7}\,; +\infty\right[$.
Considérons le plus petit entier k tel que $k \geqslant -\frac{u_0}{7}$ et posons $u = u_0 + 7k$ et $v = v_0 - 11k$.
Par définition, $u \geqslant 0$ et, par minimalité de k, $u_0 + 7(k-1) \leqslant 0$ i.e. $u \leqslant 7$ donc $-11u \geqslant -77$.
Or, par définition, $11u + 7v = n$ donc $7v = n - 11u \geqslant 77 - 77 = 0$ donc $v \geqslant 0$. Ainsi, $(u\,; v)$ est une solution de (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ ce qui montre que Lucas a raison.