Terminales générales – mathématiques expertes jeudi 9 février 2023

Devoir surveillé n°5

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (7 points)**.**

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 39 et 16 sont premiers entre eux.

2. En remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers u et v tels que $39u-16v=1$.

3. Résoudre l'équation diophantienne $39x-16y=1$ d'inconnue $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n\equiv 6\ [39] \\ n\equiv 7\ [16] \end{cases}$.

Exercice 2 (13 points)**.**

Partie A. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=5u_n+1$. On admet que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est un entier non nul.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis déterminer le P.G.C.D. de u_2 et u_3.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $4u_n=5^n-1$.

4. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $5^{n+1}-1$ et 5^n-1 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Partie B. — On propose deux généralisations du résultat de la question 4 de la partie A.

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer deux entiers u et v tels que $(a^{n+1}-1)u+(a^n-1)v=a-1$.

b. En raisonnant modulo $a-1$, démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a-1$ divise a^k-1.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $a^{n+1}-1$ et a^n-1.

2. Soit m et n deux entiers naturels premiers entre eux. On pose $d=\mathrm{PGCD}(a^m-1,a^n-1)$.

a. Justifier que $a^m\equiv 1\ [d]$ et $a^n\equiv 1\ [d]$.

b. Montrer qu'il existe deux entiers naturels s et t tels qu'on ait l'une des deux égalités $ms=1+nt$ ou $nt=1+ms$.

c. Déduire des questions précédentes que $a\equiv 1\ [d]$ puis déterminer la valeur de d.

Exercice 3 (Bonus)**.** On admet le résultat suivant qui découle d'un exercice traité en classe : si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors a^2 et b^2 le sont aussi.

Soit n un entier naturel. Montrer que si $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel alors $\sqrt{n}$ est un nombre entier.