Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1.

1. Les divisions successives sont :

$$\begin{aligned} 39 &= 2 \times 16 + 7 \\ 16 &= 2 \times 7 + 2 \\ 7 &= 3 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

donc 39 et 16 sont premiers entre eux.

2. On en déduit que

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \times 2 \\ &= 7 - 3 \times (16 - 2 \times 7) \\ &= 7 \times 7 - 3 \times 16 \\ &= 7 \times (39 - 2 \times 16) - 3 \times 16 \\ &= 7 \times 39 - 17 \times 16 \end{aligned}$$

Ainsi $u = 7$ et $v = 16$ sont deux entiers tels que $39u - 16v = 1$.

3. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation diophantienne (E) : $39x - 16y = 1$. Alors, $39x - 16y = 39 \times 7 - 16 \times 17$ donc $39(x-7) = 16(y-17)$. Ainsi, 16 divise $39(x-7)$ donc, comme 16 et 39 sont premiers entre eux, 16 divise $x - 7$. Il existe donc un entier k tel que $x - 7 = 16k$ i.e. $x = 7 + 16k$. En substituant $x - 7 = 16k$ dans $39(x-7) = 16(y-17)$, il vient $39 \times 16k = 16(y-17)$ donc $y - 17 = 39k$ i.e. $y = 17 + 39k$. Ainsi, si $(x\,;y)$ est une solution de (E) alors il existe un entier k tel que $x = 7 + 16k$ et $y = 17 + 39k$.
Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$39(7 + 16k) - 16(17 + 39k) = 39 \times 7 - 16 \times 17 + 39 \times 16k - 16 \times 39k = 1$$

donc $(7 + 16k\,; 17 + 39k)$ est solution de (E).
On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(7 + 16k\,; 17 + 39k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Soit n un entier solution du système (S) $\begin{cases} n \equiv 6\ [39] \\ n \equiv 7\ [16] \end{cases}$. Alors, il existe des entiers p et q tels que $n = 6 + 39p = 7 + 16q$ donc $39p - 16q = 1$. Ainsi, d'après la question précédente, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 7 + 16k$ donc $n = 6 + 39(7 + 16k) = 279 + 624k$. Réciproquement, comme 16 et 39 divisent 624, si $k \in \mathbb{Z}$ alors $279 + 624k \equiv 279\ [624] \equiv 279\ [16] \equiv 7\ [16]$ et $279 + 624k \equiv 279\ [624] \equiv 279\ [39] \equiv 6\ [39]$ donc $279 + 624k$ est solution de (S)
On conclut que l'ensemble des entiers solutions de (S) est $\{279 + 624k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.

1. On remarque que $b_n - 2a_n = 2n^3 + 2n + 1 - 2n(n^2 + 1) = 2n^3 + 2n + 1 - 2n^3 - 2n = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, a_n et b_n sont premiers entre eux.
2. On a $\text{PGCD}(a_n, c_n) = \text{PGCD}(n(n^2 + 1), n \times n^2) = n\text{PGCD}(n^2 + 1, n^2)$. Or, n^2 et $n^2 + 1$ sont deux entiers consécutifs donc ils sont premiers entre eux. On conclut que $\text{PGCD}(a_n, c_n) = n$.

Exercice 3.

1. On trouve $u_1 = 34$, $u_2 = 164$, $u_3 = 814$ et $u_4 = 4\,064$ et on en déduit que $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 2$.
2. On peut conjecturer que la suite (d_n) est constante égale à 2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, d_n divise u_n et u_{n+1} donc d_n divise $5u_n - u_{n+1} = 6$. Comme $d_n > 0$, on en déduit que $d_n \in \{1\,;2\,;3\,;6\}$.
4. **a.** Par définition, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6$ et on a vu dans la question précédente que $6 = 5u_n - u_{n+1}$ donc $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (5u_n - u_{n+1}) = 6u_{n+1} - 5u_n$.

   b. Par définition, d_n divise u_n et u_{n+1} donc d_n divise $6u_{n+1} - 5u_n$ i.e. d_n divise u_{n+2}. Ainsi, d_n divise u_{n+1} et u_{n+2} donc d_n divise d_{n+1}.

   c. Par définition, d_{n+1} divise u_{n+1} et u_{n+2} donc d_{n+1} divise $6u_{n+1} - u_{n+2} = 5u_n$. De plus, comme d_{n+1} divise u_{n+1}, d_{n+1} divise $5u_{n+1}$. Ainsi, d_{n+1} divise $\text{PGCD}(5u_n, 5u_{n+1}) = 5d_n$. Or, d'après le résultat de la question **3.**, d_{n+1} vaut 1, 2, 3 ou 6 donc d_{n+1} est premier avec 5. Grâce au théorème de Gauss, on conclut que d_{n+1} divise d_n.
5. On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n divise d_{n+1} et d_{n+1} divise d_n donc, comme ces deux nombres sont positifs, $d_{n+1} = d_n$. Ainsi, la suite (d_n) est bien une suite constante.

Exercice 4.

1. Posons $d = \text{PGCD}(a^2 - b^2, b^2)$. Alors, d divise $a^2 - b^2$ et b^2 donc d divise $a^2 - b^2 + b^2 = a^2$. Ainsi, d divise a^2 et b^2 donc d divise $\text{PGCD}(a^2, b^2) = 1$ donc $d = 1$. On a donc montré que b^2 et $a^2 - b^2$ sont premiers entre eux.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{\dfrac{n+2}{n}} = \dfrac{a}{b}$ et donc $\dfrac{n+2}{n} = \dfrac{a^2}{b^2}$. Ainsi, $(n+2)b^2 = na^2$ donc $2b^2 = n(a^2 - b^2)$ et, dès lors, $a^2 - b^2$ divise $2b^2$. Or, comme a et b sont premiers entre eux, d'après la question précédente, $a^2 - b^2$ et b^2 sont également premiers entre eux et ainsi, par le théorème de Gauss, $a^2 - b^2$ divise 2. Or, comme $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{n+2}{2} > 1$, $a^2 > b^2$ donc $a^2 - b^2 > 0$. On en déduit donc que $a^2 - b^2 = 1$ ou $a^2 - b^2 = 2$.

   Si $a^2 - b^2 = 1$ alors $(a - b)(a + b) = 1$ donc, comme $a - b$ et $a + b$ sont positifs, $a - b = a + b = 1$ i.e. $b = 0$ ce qui est absurde.

Si $a^2 - b^2 = 2$ alors, $(a-b)(a+b) = 2$ donc, comme $0 < a-b < a+b$, $a-b=1$ et $a+b=2$. Dès lors, $2a = a-b+a+b = 3$ ce qui est absurde car 3 est impair.

Dans tous les cas, on aboutit à une absurdité donc $\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}$ est irrationnel.

Exercice 5. Écrivons x et y sous forme de fractions irréductibles : $x = \dfrac{r}{s}$ et $y = \dfrac{t}{u}$. Alors, $x + y = \dfrac{r}{s} + \dfrac{t}{u} = \dfrac{ru+st}{su}$. Comme $x+y$ est un entier, on en déduit que su divise $ru+st$. Ainsi, comme s divise su, s divise $ru+st$ et donc s divise $ru+st-st = ru$. Or, par définition, r et s sont premiers entre eux donc, par le théorème de Gauss, s divise u. De manière identique, on montre que u divise s donc, comme s et u sont premiers entre eux, $s = u$.

Dès lors, $x = \dfrac{r}{s}$ et $y = \dfrac{t}{s}$ donc $xy = \dfrac{rt}{s^2}$. Mais, par hypothèse, xy est un entier donc s^2 divise rt et donc s divise rt. Or, s est premier avec r donc, par le théorème de Gauss, s divise t. Dès lors, s divise $\mathrm{PGCD}(s,t) = \mathrm{PGCD}(u,t) = 1$ donc, comme $s > 0$, $s = 1$. On conclut donc que $x = r$ et $y = t$ sont des entiers.