Devoir surveillé n°5

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (7 points)**.**

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 39 et 16 sont premiers entre eux.

2. En remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers u et v tels que $39u-16v=1$.

3. Résoudre l'équation diophantienne $39x-16y=1$ d'inconnue $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n\equiv 6\ [39] \\ n\equiv 7\ [16] \end{cases}$.

Exercice 2 (3 points)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $a_n=n(n^2+1)$, $b_n=2n^3+2n+1$ et $c_n=n^3$.

1. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

2. Déterminer le P.G.C.D. de a_n et c_n.

Exercice 3 (7 points)**.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}=5u_n-6.$$

On admet que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{N}^*$ et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n=\mathrm{PGCD}(u_n,u_{n+1})$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 puis en déduire les valeurs de d_0, d_1, d_2 et d_3.

2. Quelle conjecture peut-on faire concernant la suite (d_n) ?

3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, d_n divise 6 et en déduire les valeurs possibles pour d_n.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que $u_{n+2}=6u_{n+1}-5u_n$.
- **b.** En déduire que d_n divise d_{n+1}.
- **c.** Justifier que d_{n+1} divise $5d_n$ et en déduire que d_{n+1} divise d_n.

5. Démontrer la conjecture de la question **2.**.

Exercice 4 (3 points)**.** On admet le résultat suivant qui découle d'un exercice traité en classe : si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors a^2 et b^2 le sont aussi.

1. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que b^2 et a^2-b^2 sont premiers entre eux.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que $\sqrt{\frac{n+2}{n}}$ est irrationnel.

Exercice 5 (Bonus)**.** Soit x et y deux nombres rationnels tels que $x+y$ et xy sont entiers. Montrer que x et y sont entiers.