Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1.

1. FAUX. Pour additionner deux matrices, il est nécessaire qu'elles aient la même taille.
2. VRAI puisque le nombre de colonnes de l'une est égal au nombre de lignes de l'autre.
3. VRAI. Si $A^k = O_n$ alors, pour tout entier $\ell \geqslant k$, $A^\ell = A^k A^{\ell-k} = O_n A^{\ell-k} = O_n$.
4. VRAI. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible alors il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = I_n$. Dès lors, en multipliant à gauche par A et à droite par B, $A(AB)B = AI_nB$ donc $A^2B^2 = AB = I_n$ ce qui montre que A^2 est inversible (et $(A^2)^{-1} = B^2$). Réciproquement, si A^2 est inversible alors il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A^2B = I_n$ et donc $A(AB) = I_n$ ce qui montre que A est inversible (et $A^{-1} = AB$).

Exercice 2.

1. On sait que M appartient à $\mathcal{P}$ donc $ax_{\mathrm{M}}^2 + bx_{\mathrm{M}} + c = y_{\mathrm{M}}$ c'est-à-dire $a \times 1^2 + b \times 1 + c = -4$ donc $a + b + c = -4$.
   Ensuite, on sait que M est le sommet de $\mathcal{P}$. Or, l'abscisse du sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est $-\dfrac{b}{2a}$ donc $-\dfrac{b}{2a} = x_{\mathrm{M}} = 1$ c'est-à-dire $-b = 2a$ donc $2a + b = 0$.
   Autre méthode. Comme le sommet de la parabole a pour abscisse 1, la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ admet un extremum en -1. Or, f est une fonction polynôme donc f est dérivable en 1 donc $f'(1) = 0$. Comme, pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$, il s'ensuit que $2a \times 1 + b = 0$ c'est-à-dire $2a + b = 0$.
   Enfin, la parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 c'est-à-dire au point de coordonnées $(-1\,;0)$ donc $a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0$ et ainsi $a - b + c = 0$.
   On conclut que a, b et c vérifient bien le système (S).
2. L'écriture matricielle de (S) est $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. A l'aide de la calculatrice, on vérifie que A est inversible donc
   $$(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, l'unique solution de (S) est $(1\,;-2\,;-3)$.
4. On conclut que l'équation de $\mathcal{P}$ est $y = x^2 - 2x - 3$.

Exercice 3.

1. Comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Pour tout entier n,
   $$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5a_n - 4b_n \\ 2a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = AX_n$$
   en posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a. Comme $\det P = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on vérifie que $PDP^{-1} = A$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : $A^n = PD^nP^{-1}$.
Comme $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, H_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que H_k est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.
On a ainsi montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 3^n \\ 1 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n + 4 - 4 \times 3^n \\ -1 + 3^n + 4 - 2 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \times 3^n \\ 3 - 3^n \end{pmatrix}$$

et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3 - 2 \times 3^n$ et $b_n = 3 - 3^n$.

5. Un examen attentif des opérations dans le calcul de B^2 montre qu'on obtient une matrice dont le carré en haut à gauche correspond à A^2, les autres termes restent des 0 et un 1. On peut généraliser cela par récurrence et obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & O_{2,1} \\ \hline O_{1,2} & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n & 0 \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$