# Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

**Exercice 1.** (5 points) — Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut additionner une matrice de taille $2 \times 3$ avec une matrice de taille $3 \times 2$.
2. On peut multiplier une matrice de taille $2 \times 3$ par une matrice de taille $3 \times 2$.
3. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $k$ un entier naturel non nul. Si $A^k = O_n$ alors, pour tout entier $\ell \geqslant k$, $A^\ell = O_n$.
4. Pour toute matrice carrée $A$, la matrice $A$ est inversible si et seulement si la matrice $A^2$ est inversible.

**Exercice 2.** (5 points) — On considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels tels que $a \neq 0$. On sait que :

— le sommet de la parabole $\mathcal{P}$ est le point M de coordonnées $(1\,;-4)$.
— la parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont l'un a pour abscisse $-1$.

1. Justifier que les nombres $a$, $b$ et $c$ vérifient le système $(S)$ $\begin{cases} a+b+c=-4 \\ 2a+b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$.
2. Donner l'écriture matricielle du système $(S)$.
3. Résoudre $(S)$ en utilisant les matrices.
4. En déduire l'équation de $\mathcal{P}$.

**Exercice 3.** (10 points) — On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - b_n \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $X_0$.
2. Déterminer une matrice $A$ carrée d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   **a.** Sans calculatrice, justifier que $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.
   **b.** À l'aide de la calculatrice, calculer $PDP^{-1}$.
   **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   **d.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. Déduire de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.
5. (Bonus) On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n$.