

Devoir surveillé n°3

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points). On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -2 + 3i$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires :

$$\begin{array}{llll}
 a) z_3 = z_1 + z_2; & b) z_4 = z_1 z_2; & c) z_5 = \frac{1}{z_1}; & d) z_6 = \frac{z_1}{z_2} \\
 e) z_7 = \overline{z_1}; & f) z_8 = \overline{z_1 - z_2}; & g) z_9 = \frac{1}{z_2}; & h) z_{10} = \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}.
 \end{array}$$

Exercice 2 (6 points). Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

1. $(E) : (2 + i)z = i - 3z.$
2. $(F) : (z - 2i)(iz + 2 - i) = 0.$
3. $(G) : z - 2\overline{z} = 3 - 2i.$
4. $(H) : z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$

Exercice 3 (5 points). Pour tout nombre complexe z , on pose $Z = 2z^2 - \overline{z}^2$.

1. On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + ib$. Déterminer, en fonction de a et b , la partie réelle et la partie imaginaire de Z .
2. **a.** Montrer que si $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ alors Z est imaginaire pur.
b. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = 0$.

Exercice 4 (2 points). Soit z un complexe différent de 1. On pose

$$Z = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Démontrer que Z est imaginaire pur si et seulement si $z\overline{z} = 1$.

Exercice 5 (4 points). On considère une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} telle que :

- pour tout réel x , $f(x) = x$;
- pour tous complexes z et z' , $f(z + z') = f(z) + f(z')$;
- pour tous complexes z et z' , $f(zz') = f(z)f(z')$.

1. Montrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
2. On suppose que $f(i) = i$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z$.
3. On suppose que $f(i) = -i$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$.