Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1.

a) $z_3 = 1 + \mathrm{i} + (-2 + 3\,\mathrm{i}) = -1 + 4\,\mathrm{i}$

b) $z_4 = (1 + \mathrm{i})(-2 + 3\,\mathrm{i}) = -2 + 3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} - 3 = -5 + \mathrm{i}$

c) $z_5 = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

d) $z_6 = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{-2 + 3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(-2 - 3\,\mathrm{i})}{(-2)^2 + 3^2} = \dfrac{-2 - 3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} + 3}{13} = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}\,\mathrm{i}$

e) $z_7 = \overline{1 + \mathrm{i}} = 1 - \mathrm{i}$

f) $z_8 = \overline{(1 + \mathrm{i}) - (-2 + 3\,\mathrm{i})} = \overline{3 - 2\,\mathrm{i}} = 3 + 2\,\mathrm{i}$

g) $z_9 = \dfrac{1}{\overline{-2 + 3\,\mathrm{i}}} = \dfrac{1}{-2 - 3\,\mathrm{i}} = \dfrac{-2 + 3\,\mathrm{i}}{(-2)^2 + (-3)^2} = -\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}\,\mathrm{i}$

h) $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{-2 + 3\,\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{-2 + 3\,\mathrm{i}}}{\overline{1 + \mathrm{i}}} = \dfrac{-2 - 3\,\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{(-2 - 3\,\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{1^2 + (-1)^2} = \dfrac{-2 - 2\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i} + 3}{2}$

$\quad = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\,\mathrm{i}$

Exercice 2.

1. Pour tout complexe z,

$$(E) \Leftrightarrow (2 + \mathrm{i})z = \mathrm{i} - 3z \Leftrightarrow (5 + \mathrm{i})z = \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}}{5 + \mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}\,(5 - \mathrm{i})}{5^2 + 1^2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}\,\mathrm{i}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\dfrac{1}{26} + \dfrac{1}{26}\,\mathrm{i}\right\}$.

2. Pour tout complexe z,

$$(F) \Leftrightarrow z - 2\,\mathrm{i} = 0 \text{ ou } \mathrm{i}\,z + 2 - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i} \text{ ou } \mathrm{i}\,z = -2 + \mathrm{i}$$
$$\Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i} \text{ ou } z = \frac{-2 + \mathrm{i}}{\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i} \text{ ou } z = \frac{(-2 + \mathrm{i})(-\mathrm{i})}{1^2} \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i} \text{ ou } z = 1 + 2\,\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\{2\,\mathrm{i}\,;1 + 2\,\mathrm{i}\}$.

3. Si z est nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$. Alors, pour tout complexe z,

$$(G) \Leftrightarrow x + \mathrm{i}\,y - 2(x - \mathrm{i}\,y) = 3 - 2\,\mathrm{i} \Leftrightarrow -x + 3\,\mathrm{i}\,y = 3 - 2\,\mathrm{i}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = 3 \\ 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow z = -3 - \frac{2}{3}\,\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (G) est $\left\{-3 - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}\right\}$.

4. On procède comme pour (G) :

$$
\begin{aligned}
(H) &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}\,y)^2-2(x-\mathrm{i}\,y)+1=0 \Leftrightarrow x^2+2\,\mathrm{i}\,xy-y^2-2x+2\,\mathrm{i}\,y+1=0\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+1+\mathrm{i}\,(2xy+2y)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2x+1=0\\ 2y(x+1)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4-y^2=0\\ x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2=4\\ x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=2\\ x=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-2\\ x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z=-1+2\,\mathrm{i} \text{ ou } z=-1-2\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) est $\{1\,;-1+2\,\mathrm{i}\,;-1-2\,\mathrm{i}\}$.

Exercice 3.

1. On a

$$
\begin{aligned}
Z=(a+\mathrm{i}\,b)^2+(a-\mathrm{i}\,b)(a+\mathrm{i}\,b+2)&=a^2+2\,\mathrm{i}\,ab-b^2+a^2+\mathrm{i}\,ab+2a-\mathrm{i}\,ba+b^2-2\,\mathrm{i}\,b\\
&=2a^2+2a+\mathrm{i}\,(2ab-2b)
\end{aligned}
$$

donc $\mathrm{Re}(Z)=2a^2+2a$ et $\mathrm{Im}(Z)=2ab-2b$.

2. a. Si $z\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $a=0$ donc $\mathrm{Re}(Z)=2\times 0^2+2\times 0=0$ et donc $Z\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

b. La réciproque est fausse. En effet, si $z=-1$ alors $a=-1$ donc $\mathrm{Re}(Z)=2(-1)^2+2(-1)=0$ et ainsi Z est imaginaire pur mais z ne l'est pas.

3. On a

$$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z)=0\Leftrightarrow 2b(a-1)=0\Leftrightarrow b=0 \text{ ou } a=1$$

donc l'ensemble des z tels que Z est réel est $\mathbb{R}\cup\{1+\mathrm{i}\,b\mid b\in\mathbb{R}\}$.

4. On a

$$\mathrm{Re}(Z)=-1\Leftrightarrow 2a^2+2a=-1\Leftrightarrow 2a^2+2a+1=0.$$

Or, le discriminant du trinôme $2X^2+2X+1$ est $\Delta=2^2-4\times 2\times 1=-4<0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle. Ainsi, il n'existe pas de complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z)=-1$.

5. Pour $z=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$ donc $\mathrm{Re}(Z)=2(-\frac{1}{2})^2+2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$ donc il existe un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z)<0$.

Exercice 4.

1. On a $j^2=(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+2(-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}+-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}=\overline{j}$ donc

$$1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + j + j^2 + \cdots + j^n$.
Commençons par remarquer que $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + j = -j^2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ (car $1 + j + j^2 = 0$) et $S_2 = 1 + j + j^2 = 0$.
De plus, si q est un entier naturel non nul alors

$$\begin{aligned} S_{3q-1} &= 1 + j + j^2 + j^3 + j^4 + j^5 + \cdots + j^{3q-2} + j^{3q-1} + j^{3q} \\ &= (1 + j + j^2) + j^3(1 + j + j^2) + \cdots + j^{3q-3}(1 + j + j^2) = 0 \end{aligned}$$

puisque chaque facteur $1 + j + j^2$ est nul.
Soit un entier $n \geqslant 3$. Notons r le reste dans la division euclidienne de n par 3. Alors, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 3q + r$ donc

- si $r = 0$ alors, d'après ce qui précède, $S_n = S_{3q-1} + j^{3q} = (j^3)^q$. Or, comme $j^2 = \overline{j}$, $j^3 = j \times j^2 = j\overline{j} = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ donc $S_n = 1^q = 1$;
- si $r = 1$ alors $S_n = S_{3q+1} = S_{3q-1+2} = S_{3q-1} + j^{3q} + j^{3q+1} = j^{3q}(1 + j) = (j^3)^q(-j^2) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- si $r = 2$ alors $S_n = S_{3q+2} = S_{3(q+1)-1} = 0$.

On conclut donc que $S_n = 1$ si $n \equiv 0$ [3], $S_n = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ si $n \equiv 1$ [3] et $S_n = 0$ si $n \equiv 2$ [3].