Devoir surveillé n°3

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points). On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + 3\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires :

a) $z_3 = z_1 + z_2$; *b*) $z_4 = z_1 z_2$; *c*) $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$; *d*) $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$; *f*) $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$; *g*) $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$: *h*) $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$.

Exercice 2 (6 points). Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(E) : (2 + \mathrm{i})z = \mathrm{i} - 3z$.
2. $(F) : (z - 2\,\mathrm{i})(\mathrm{i}\,z + 2 - \mathrm{i}) = 0$.
3. $(G) : z - 2\overline{z} = 3 - 2\,\mathrm{i}$.
4. $(H) : z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 3 (6 points). Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z^2 + \overline{z}(z + 2)$.

1. On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}\,b$. Déterminer, en fonction de a et b, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. **a.** Montrer que si z est imaginaire pur alors Z est imaginaire pur.

   b. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.
4. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) = -1$?
5. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) < 0$?

Exercice 4 (3 points). On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2 et en déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer, selon les valeurs de n, $1 + j + j^2 + \cdots + j^n$.