Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1.

1. a. Écrivons les divisions successives :

$$\begin{aligned}
321 &= 2\times 122+77\\
122 &= 1\times 77+45\\
77 &= 1\times 45+32\\
45 &= 1\times 32+13\\
32 &= 1\times 2\times 13+6\\
13 &= 2\times 6+\boxed{1}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'algorithme d'Euclide, $\boxed{\mathrm{PGCD}(321,122)=1}$.

b. En « remontant » l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$$\begin{aligned}
1 &= 13-2\times 6\\
&= 13-2(32-2\times 13)=5\times 13-2\times 32\\
&= 5(45-32)-2\times 32=5\times 45-7\times 32\\
&= 5\times 45-7(77-45)=12\times 45-7\times 77\\
&= 12(122-77)-7\times 77=12\times 122-19\times 77\\
&= 12\times 122-19(321-2\times 122)=50\times 122-19\times 321
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(50\,;19) \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

c. Soit $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ une solution de (E). Alors, $122x-321y=1=122\times 50-321\times 19$ donc $122(x-50)=321(y-19)$. Ainsi, 321 divise $122(x-50)$. Or, d'après la question **a.**, 321 et 122 sont premiers entre eux donc, par le théorème de Gauss, 321 divise $x-50$. Ainsi, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-50=321k$ i.e. $x=50+321k$. De plus, comme $122(x-50)=321(y-19)$, $122\times 321k=321(y-19)$ donc $122k=y-19$ et donc $y=19+122k$.
On a donc montré que si $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ est solution de (E) alors il existe un entier k tel que $x=50+321k$ et $y=19+122k$.
Réciproquement, soit $k\in\mathbb{Z}$, $x=50+321k$ et $y=19+122k$. Alors,

$$\begin{aligned}
122x-321y &= 122(50+321k)-321(19+122k)\\
&= 122\times 50-321\times 19+122\times 321k-321\times 122k\\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $(x\,;y)$ est solution de (E).
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{(50+321k\,;19+122k)\mid k\in\mathbb{Z}\}}$.

2. Supposons que n soit un entier relatif tel que $n \equiv 3\ [122]$ et $n \equiv 4\ [321]$. Alors, il existe deux entiers p et q tels que $n = 3 + 122p$ et $n = 4 + 321q$. Ainsi, $3 + 122p = 4 + 321q$ donc $122p - 321q = 1$. On déduit donc de la question 1. qu'il existe un entier k tel que $p = 50 + 321k$ et donc $n = 3 + 122(50 + 321k) = 6103 + 39162k$.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n = 6103 + 39162k$. Alors, $n = 3 + 122(50 + 321k)$ donc $n \equiv 3\ [122]$ et $n = 4 + 321(19 + 122k)$ donc $n \equiv 4\ [321]$.

On conclut que l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n \equiv 3\ [122]$ et $n \equiv 4\ [321]$ est $\boxed{\{6103 + 39162k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $50 + 321k \geqslant 0$ et $19 + 122k \geqslant 0$ donc, d'après le résultat de la question **1.c.**, $\boxed{(E) \text{ possède une infinité de solutions dans } \mathbb{N}^2}$.

4. a. Comme $n-1$ divise $n-1$, par définition, $\boxed{n \equiv 1\ [n-1]}$. Soit un entier $m \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède que $n^m \equiv 1^m\ [n-1]$ i.e. $n^m \equiv 1\ [n-1]$. Par définition, cela signifie que $n-1$ divise $n^m - 1$. En appliquant ceci avec $m = 122x \in \mathbb{N}$ puis $m = 321y \in \mathbb{N}$, on conclut que $\boxed{n-1 \text{ divise } A_n \text{ et } B_n}$.

b. Par définition, $122x - 321y = 1$ donc $321y + 1 = 122x$ et ainsi

$$A_n - nB_n = n^{122x} - 1 - n\left(n^{321y} - 1\right) = n^{122x} - 1 - n^{321y+1} + n = n^{122x} - 1 - n^{122x} + n$$

i.e. $\boxed{A_n - nB_n = n - 1}$.

c. Posons $d_n = \mathrm{PGCD}(A_n, B_n)$. Alors, d'après la question **4.a.**, $n-1$ divise A_n et B_n donc $n-1$ divise d_n. De plus, comme d_n divise A_n et B_n, il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres et ainsi, d'après la question **4.b.**, d_n divise $n-1$. Comme $d_n > 0$ et $n - 1 > 0$ (car $n > 1$), on conclut que $\boxed{d_n = n-1}$.

Exercice 2.

1. Commençons par remarquer que $0 < 16 < 20$. Notons $d = \mathrm{PGCD}(16, 20)$. Comme $20 - 16 = 4$, d divise 4. De plus, 4 divise 16 et 20 donc $d = 4$. Ainsi, $20 - 16 = d$ donc $\boxed{(16\,;20) \in S}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par remarquer que $0 < n < n+1$. De plus, $(n+1) - n = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, $\mathrm{PGCD}(n, n+1) = 1$. On conclut donc que $\boxed{(n\,;n+1) \in S}$.

3. Supposons que $(x\,;y)$ appartienne à S. Alors, $\mathrm{PGCD}(x, y) = y - x$ donc $y - x$ divise x et y. Ainsi, il existe deux entiers k et k' tels que $x = k(y - x)$ et $y = k'(y - x)$. Notons que $k > 0$ et $k' > 0$ car $x > 0$, $y > 0$ et $y - x > 0$. De plus, on a

$$y - x = k'(y - x) - k(y - x) = (k' - k)(y - x)$$

et, en divisant par $y - x \neq 0$, on conclut que $k' - k = 1$ i.e. $k' = k + 1$.

On a donc bien montré l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k+1)(y - x)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k+1)(y - x)$. Alors,

$$\mathrm{PGCD}(x, y) = \mathrm{PGCD}(k(y - x), (k+1)(y - x)) = (y - x)\mathrm{PGCD}(k, k+1)$$

et on a vu dans la question **2.** que $\text{PGCD}(k, k+1) = 1$ donc $\text{PGCD}(x, y) = y - x$ donc $(x\,;y) \in S$.

On conclut que $\underline{(x\,;y) \in S \text{ si et seulement s'il existe } k > 0 \text{ tel que } x = k(y-x) \text{ et } y = (k+1)(y-x)}$.

4. a. Soit $(x\,;y) \in S$. D'après la question précédente, il existe un entier $k > 0$ tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$. Dès lors,

$$\text{PPCM}(x, y) = \text{PPCM}(k(y-x), (k+1)(y-x)) = (y-x)\text{PPCM}(k, k+1)$$

Or, on a vu que k et $k+1$ sont premiers entre eux donc $\text{PPCM}(k, k+1) = k(k+1)$ et ainsi $\boxed{\text{PPCM}(x, y) = k(k+1)(y-x)}$.

b. Supposons que $(x\,;y) \in S$ est tel que $\text{PPCM}(x, y) = 114$. Alors, il existe un entier $k > 0$ tel que $k(k+1)(y-x) = 114$. Or, les diviseurs positifs de 114 sont 1, 2, 3, 6, 19, 38, 57 et 114 donc $k = 1$, $k+1 = 2$ et $y - x = 57$ ou $k = 2$, $k+1 = 3$ et $y - x = 19$. Dans le premier cas, $x = k(y-x) = 57$ et $y = (k+1)(y-x) = 114$ et, dans le second cas, $x = k(y-x) = 38$ et $y = (k+1)(y-x) = 57$.

Réciproquement, $(57\,;114)$ appartient à S car $57 = 1(114-57)$ et $114 = (1+1)(114-57)$ et $\text{PPCM}(57, 114) = 1(1+1)(114-57) = 114$ donc $(57\,;114)$ convient. De même, $(38\,;57)$ appartient à S car $38 = 2(57-38)$ et $57 = (2+1)(57-38)$ et $\text{PPCM}(38, 57) = 2(2+1)(57-38) = 114$ donc $(38\,;57)$ convient.

Ainsi, $\boxed{\text{les couples de } S \text{ dont le P.P.C.M. est 114 sont } (57\,;114) \text{ et } (38\,;57)}$.

5. a. D'après la question **2.**, la couple $(a\,;a+1)$ appartient à S. Cette solution revient prendre $k = a$ et à écrire $a = a \times 1$ et $b = (a+1) \times 1$. On peut également prendre $k = 1$ et écrire $a = 1 \times a$ et $b = (1+1)a = 2a$. Ainsi, $(a\,;2a)$ appartient à S d'après la question **3.** et $2a \neq a+1$ car $a > 1$. Ainsi, il existe au moins deux entiers b distincts ($a+1$ et $2a$) tels que $(a\,;b)$ appartienne à S.

b. Si on prend $a = 2$ alors un entier $b > 2$ est tel que $(a\,;b) \in S$ si et seulement si $b = (k+1)(b-2)$ où $k > 0$ est un entier tel que $2 = k(b-2)$ i.e. k est un diviseur de 2. Il n'y a que deux possibilités pour k : 1 ou 2. Pour $k = 1$, on trouve $2 = 1(b-2)$ donc $b = 4$ et, pour $k = 2$, on trouve $2 = 2(b-2)$ i.e. $b = 3$.

Ainsi, il n'est pas toujours possible de trouver 3 entiers distincts b tels que $(a\,;b)$ appartienne à S.