Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. Pour les trois questions, on peut faire un tableau de restes :

Reste de x modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de $5x$ modulo 7	0	5	3	1	6	4	2
Reste de $x(x-2)$ modulo 7	0	6	0	3	1	1	3
Reste de x^2 modulo 7	0	1	4	2	2	4	1

On déduit de ce tableau que :

1. l'ensemble des entiers x tels que $5x \equiv 1$ [5] est $\{3 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. l'ensemble des entiers x tels que $x(x-2) \equiv 6$ [5] est $\{1 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Pour tout entier x, $x^2 \equiv 0$ [7] si et seulement si $x \equiv 0$ [7] donc 7 divise x^2 si et seulement si 7 divise x. L'affirmation est vraie.

Exercice 2. On considère l'équation $(E) : x^2 - 3y^2 = 2023$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$.

1. Comme $2023 = 252 \times 8 + 7$ avec $0 \leqslant 7 < 8$, le reste de 2023 modulo 8 est 7.

2. a. Le tableau suivant donne les restes modulo 8 :

Reste de n modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de n^2 modulo 8	0	1	4	1	0	1	4	1

Ainsi, les restes possibles pour n^2 modulo 8 sont 0, 1 et 4.

b. Le tableau suivant donne les restes de $x^2 - 3y^2$ modulo 8 :

y^2 \ x^2	0	1	4
0	0	1	4
1	5	6	1
4	4	5	0

Ainsi, les restes possibles pour $x^2 - 3y^2$ modulo 8 sont 0, 1, 4, 5 et 6.

3. Pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$, $x^2 - 3y^2$ et 2023 n'ont pas le même reste modulo 8 donc $x^2 - 3y^2 \not\equiv 2023$ [8] et ainsi $x^2 - 3y^2 \neq 2023$. On conclut donc que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\varnothing$.

Exercice 3 (10 points). — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = 7^{2n} - 4^n$.

1. $A_1 = 45 = 9 \times 5$, $A_2 = 2385 = 9 \times 265$ et $A_3 = 117585 = 9 \times 13065$ donc ces trois nombres sont divisibles par 9.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $7^2 = 49 = 9 \times 5 + 4$ donc $7^2 \equiv 4$ [9]. Dès lors, $7^{2n} = (7^2)^n \equiv 4^n$ [9] donc $7^{2n} - 4^n \equiv 0$ [9] c'est-à-dire $A_n \equiv 0$ [9]. On conclut donc que 9 divise A_n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n le quotient de A_n par 9 c'est-à-dire l'unique entier tel que $A_n = 9Q_n$.

a. D'après la question **1.**, $Q_1 = 5$, $Q_2 = 265$ et $Q_3 = 12065$. On peut conjecturer ue le chiffre des unités de Q_n est 5 pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On a $7^2 = 49 \equiv 49\ [90]$, $7^4 = 2401 \equiv 61\ [90]$, $7^6 \equiv 7^2 \times 61\ [90] \equiv 19\ [90]$, $7^8 \equiv 7^2 \times 19\ [90] \equiv 31\ [90]$, $7^{10} \equiv 7^2 \times 31\ [90] \equiv 79\ [90]$ et $7^{12} \equiv 7^2 \times 79\ [90] \equiv 1\ [90]$.
Notons r le reste dans le division euclidienne de n par 6. Alors, il existe un entier q tel que $n = 6q + r$ donc

$$7^{2n} = 7^{2(6q+r} = (7^{12})^q \times 7^{2r} \equiv 1^q \times 7^{2r}\ [90] \equiv 7^{2r}\ [90].$$

Ainsi, le reste de 7^{2n} modulo 90 est le même que celui de 7^{2r} c'est-à-dire 1 si $r = 0$, 49 si $r = 1$, 61 si $r = 2$, 19 si $r = 3$, 31 si $r = 4$ et 79 si $r = 5$.

c. Comme $4^6 = 4096 = 91 \times 45 + 1 \equiv 1\ [45]$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $4^{6q} \equiv 1^q\ [45] \equiv 1\ [45]$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, il existe un entier q tel que $n = 6q + r$. Si $r \neq 0$ alors $r - 1 \geqslant 0$ donc, par la question précédente,

$$4^{n-1} = 4^{6q+r-1} = (4^6)^q \times 4^{r-1} \equiv 1^q \times 4^{r-1} \equiv 4^{r-1}\ [45].$$

Ainsi, il existe un entier m tel que $4^{n-1} = 4^{r-1} + 45m$ donc, en multipliant par 4, $4^n = 4^r + 180m = 4^r + 90 \times (2m) \equiv 4^r\ [90]$.
Si $r = 0$ alors $n = 6q$ et, comme $n > 0$, $q \geqslant 1$ donc $n - 6 = 6(q-1) \geqslant 0$. Dès lors, par la question précédente, $4^{6(q-1)} \equiv 1\ [45]$ donc il existe un entier m tel que $4^{n-6} = 1 + 45m$. En multipliant par 4^6, on en déduit que

$$4^n \equiv 4^6 + 4^6 \times 45m = 46 + 45 \times 90 + 90 \times 2048m \equiv 46\ [90].$$

e. Notons r le reste dans la division euclidienne de n par 6. D'après les questions précédentes, Si $r = 0$ alors $A_n \equiv 1 - 46\ [90] \equiv 45\ [90]$ et, sinon, $A_n \equiv 7^{2r} - 4^r\ [90]$ ce qui donne 45 modulo 90 dans tous les cas. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \equiv 45\ [90]$.

f. On en déduit qu'il existe un entier m tel que $A_n = 45 + 90m$ donc $9Q_n = 45 + 90m$ et ainsi $Q_n = 5 + 10m \equiv 5\ [10]$ donc le chiffre des unités de Q_n est 5.