Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $5x \equiv 1\ [7]$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x(x-2) \equiv 6\ [7]$.
3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « pour tout entier x, 7 divise x^2 si et seulement si 7 divise x » ?

Exercice 2 (5 points). On considère l'équation (E) : $x^2 - 3y^2 = 2023$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$.

1. Déterminer le reste de 2023 modulo 8.
2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un tableau de restes, déterminer les restes possibles pour n^2 modulo 8.

   b. Soit x et y deux entiers naturels. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer les restes possibles pour $x^2 - 3y^2$ modulo 8.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 3 (10 points). — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = 7^{2n} - 4^n$.

1. Calculer A_1, A_2 et A_3 et vérifier que ces trois nombres sont divisibles par 9.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 9 divise A_n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n le quotient de A_n par 9 c'est-à-dire l'unique entier tel que $A_n = 9Q_n$.

   a. Déterminer Q_1, Q_2 et Q_3.
   Quelle conjecture peut-on faire concernant le chiffre des unités de Q_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   b. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les restes possibles de 7^{2n} modulo 90. (On vérifiera en particulier que ces restes sont périodiques de période 6).

   c. Démontrer que, pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, $4^{6q} \equiv 1\ [45]$.

   d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de n modulo 6.

      i. On suppose que $r > 0$. En considérant 4^{n-1} et en utilisant la question **c.**, montrer que $4^n \equiv 4^r\ [90]$.

      ii. On suppose que $r = 0$. En considérant 4^{n-6} et en utilisant la question **c.**, montrer que $4^n \equiv 46\ [90]$.

   e. En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \equiv 45\ [90]$.

   f. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le chiffre des unités de Q_n.