

Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (4 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $3x \equiv 1 \pmod{5}$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 3x \pmod{5}$.

Exercice 2 (4 points). — Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $3^{2n} \equiv 2^n \pmod{7}$ et que $2^{4n} \equiv 2^n \pmod{7}$.
2. En déduire que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$.

Exercice 3 (4 points). — En raisonnant modulo 6, montrer que l'équation $x^2 - 6y^2 = 2018$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

Exercice 4 (8 points). — Dans cet exercice, on étudie un algorithme permettant de tester la divisibilité d'un entier naturel par 7. Tous les entiers sont écrits en base 10 (écriture décimale habituelle).

1. Deux exemples

a. On considère le nombre $x = 413$. Ce nombre est formé de 41 dizaines et 3 unités. On lui associe le nombre $y = 41 - 2 \times 3 = 35$ obtenu en soustrayant 2 fois le nombre d'unités de x au nombre de dizaines de x .

Vérifier que x et y sont tous les deux divisibles par 7.

b. On considère à présent le nombre $x' = 445$ et le nombre $y' = 44 - 2 \times 5 = 34$ construit de la même façon.

Vérifier que x' et y' ne sont pas divisibles par 7.

2. Le cas général

Soit a et b deux entiers naturels.

a. Calculer $7(a - b) - 4(a - 2b)$ et en déduire que si 7 divise $a - 2b$ alors 7 divise $3a + b$.

b. En raisonnant de même, montrer que si 7 divise $3a + b$ alors 7 divise $a - 2b$.

c. On considère un nombre x formé de a dizaines et b unités.

Montrer que $x \equiv 3a + b \pmod{7}$ et en déduire que 7 divise x si et seulement si 7 divise $a - 2b$.

- d. On considère l'algorithme suivant dans lequel $X \bmod 10$ désigne le reste de X modulo 10.

```
X ← x
Tant que X > 10
  B ← (X mod 10)
  A ← (X - B)/10
  X ← A - 2B
Fin Tant que
Si X = -14 ou X = -7 ou X = 0 ou X = 7
  Afficher « x est divisible par 7 »
Sinon
  Afficher « x n'est pas divisible par 7 »
Fin Si
```

On fait fonctionner cet algorithme avec un entier naturel x .

Expliquer pourquoi l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes et justifier la validité de l'affichage.

- e. Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $x = 13\,979$.