Correction du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. VRAI. Soit a et b deux entiers tels que b divise a. Alors, il existe un entier k tel que $a = kb$ donc $a^2 = k^2b^2$ et, comme k^2 est un entier, b^2 divise a^2.
2. FAUX. Si $a = 4$ et $b = c = 2$ alors $a = 4$ divise $bc = 4$ mais a ne divise ni a ni b.
3. VRAI. Soir a, b et c des entiers. Si a divise $ac + b$ alors, comme a divise a, a divise $(ac + b) - ca = b$ et, réciproquement, si a divise b alors, comme a divise a, a divise $ca + b = ac + b$. Ainsi, a divise $ac + b$ si et seulement si a divise b.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $7n-5$ divise 23 si et seulement si $7n-5 \in \{-23\,;-1\,;1\,;23\}$ c'est-à-dire $n \in \{-\frac{18}{7}\,;\frac{4}{7}\,;\frac{6}{7}\,;4\}$. Comme n est entier, on en déduit que $7n-5$ divise 23 si et seulement si $n = 4$ donc l'ensemble cherché est $\{4\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, 23 divise $n+2$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $n+2 = 23k$ c'est-à-dire $n = 23k - 2$. Ainsi, l'ensemble cherché est $\{23k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que $n+2$ divise $7n-5$. Alors, comme $n+2$ divise $n+2$, $n+2$ divise $7(n+2)-(7n-5) = 19$ donc $n+2 \in \{-19\,;-1\,;1\,;19\}$ c'est-à-dire $n \in \{-21\,;-3\,;-1\,;17\}$.
   Réciproquement, si $n = -21$ alors $7n - 5 = -152$ et $n + 2 = -19$. Or, $-152 = 8 \times (-19)$ donc $n + 2$ divise $7n - 5$.
   Si $n = -3$ alors $n + 2 = -1$ donc $n + 2$ divise $7n - 5$ car -1 divise tous les entier.
   Si $n = -1$ alors $n + 2 = 1$ donc $n + 2$ divise $7n - 5$ car 1 divise tous les entier.
   Si $n = 17$ alors $7n - 5 = 114$ et $n + 2 = 19$. Or, $114 = 6 \times 9$ donc $n + 2$ divise $7n - 5$.
   On conclut que l'ensemble cherché est $\{-21\,;-3\,;-1\,;17\}$.

Exercice 3.

1. $2\,022 = 87 \times 23 + 21$ et $0 \leqslant 21 < 23$ donc $r = 21$.
2. On écrit $3n + 2 = 2(n + 1) + n$ et $0 \leqslant n < n + 1$ donc $r = n$.
3. On écrit $2n^2 + 4n + 4 = (n + 1)(2n + 1) + n + 3$.
   Si $n > 2$ alors $2n > n + 2$ donc $2n + 1 > n + 3 \geqslant 0$ donc $r = n + 3$.
   Si $n = 0$ alors $A = 4$ et $B = 1$ donc $r = 0$ car 1 divise tous les entiers.
   Si $n = 1$ alors $A = 10$ et $N = 3$ donc $r = 1$ car $10 = 3 \times 3 + 1$.
   Si $n = 2$ alors $A = 20$ et $B = 5$ donc B divise A et ainsi $r = 0$.

Exercice 4.

1. Comme $3^6 - 1 = 728 = 104 \times 7$, $3^6 - 1$ est divisible par 7.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors, $3^{m+6} - 3^m = 3^m(3^6 - 1)$ donc, comme 7 divise $3^6 - 1$ et comme 3^m est un entier, 7 divise $3^m(3^6 - 1)$. Ainsi, $3^{m+6} - 3^m$ est divisible par 7.

3. Considérons, pour tout $q \in \mathbb{N}$, la proposition P_q : « 7 divise $3^{6q+r} - 3^r$ ».
$3^{6\times 0+r} - 3^r = 3^r - 3^r = 0 = 0 \times 7$ donc P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que P_k est vraie. Alors, 7 divise $3^{6k+r} - 6^r$. De plus, d'après la question précédente (appliqué avec $m = 6k$), 7 divise $3^{6k+r+6} - 3^{6k+r} = 3^{6(k+1)+r} - 3^{6k+r}$. Dès lors, en déduit que 7 divise $3^{6(k+1)+r} - 3^{6k+r} + 3^{6k+r} - 3^r = 3^{6(k+1)+r} - 3^r$ donc P_{k+1} est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6q+r} - 3^r$.

4. Par définition, il existe un entier naturel q tel que $n = 6q + r$ et un entier Q tel que $3^r = 7Q + R$. Ainsi, comme $n = 6q + r$, d'après la question précédente, il existe un entier k tel que $3^n - 3^r = 7k$ donc $3^n = 3^r + 7k = 7Q + R + 7k = 7(Q + k) + R$. Or, par définition, $0 \leqslant R < 7$ donc l'écriture précédente est la division euclidienne de 3^n par 7 et ainsi R est bien le reste dans le division euclidienne de 3^n par 7.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, 7 divise $3^n - 1$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $3^n - 1 = 7k$ i.e. $3^n = 7k + 1$. Comme $0 \leqslant 1 < 7$, on en déduit que 7 divise $3^n - 1$ si et seulement si le reste de 3^n dans la division par 7 est égale à 1. Or, d'après la question précédente, le reste de 3^n dans la division par 7 est le même que le reste de 3^r où r est le reste de n dans la division par 6. En remarquant que $3^0 = 1 = 1 + 0 \times 7$, $3^1 = 3 = 3 + 0 \times 7$, $3^2 = 9 = 2 + 1 \times 7$, $3^3 = 27 = 6 + 3 \times 7$, $3^4 = 81 = 4 + 11 \times 7$ et $3^5 = 243 = 5 + 34 \times 7$, on conclut que 7 divise $3^n - 1$ si et seulement si le reste dans la division de n par 6 est 0 c'est-à-dire si et seulement si 6 divise n. Ainsi, l'ensemble cherché est $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$.

a. On reconnaît dans S_n la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 3, donc
$$S_n = \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{3^n - 1}{2}.$$
Ainsi, $3^n - 1 = 2S_n$. Dès lors, si 7 divise S_n alors 7 divise $2S_n$ donc 7 divise $3^n - 1$.

b. On vient de voir que $2S_n = 3^n - 1$ donc, comme 7 divise $3^n - 1$, 7 divise $2Sn$. Dès lors, 7 divise $7S_n - 3(2S_n) = S_n$.

c. Les deux questions précédentes montrent que 7 divise S_n si et seulement si 7 divise $3^n - 1$ et on déduit alors de la question **5.** que l'ensemble des entiers naturels n tels que 7 divise S_n est $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$.