Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (4 points)**.** Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Pour tous entiers a et b, si b divise a alors b^2 divise a^2.

2. Pour tous entiers a, b et c, si a divise bc alors a divise b ou a divise c.

3. Pour tous entiers a, b et c, a divise $ac + b$ si et seulement si a divise b.

Exercice 2 (4 points)**.**

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $7n - 5$ divise 23.

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 23 divise $n + 2$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $7n - 5$.

Exercice 3 (4 points)**.** Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B.

1. $A = 2\,022$ et $B = 23$;

2. $A = 3n + 2$ et $B = n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$

3. $A = 2n^2 + 4n + 4$ et $B = 2n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (12 points)**.**

1. Montrer que $3^6 - 1$ est divisible par 7.

2. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $3^{m+6} - 3^m$ est divisible par 7.

3. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6q+r} - 3^r$. (Pour l'hérédité, on pourra écrire, pour $k \in \mathbb{N}$, $3^{6(k+1)+r} - 3^r = 3^{6(k+1)+r} - 3^{6k+r} + 3^{6k+r} - 3^r$.)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note r le reste dans la division euclidienne de n par 6 et R le reste dans la division euclidienne de 3^r par 7. Déduire de la question précédente que R est le reste dans le division euclidienne de 3^n par 7.

5. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que 7 divise $3^n - 1$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si 7 divise S_n alors 7 divise $3^n - 1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que 7 divise $3^n - 1$. Montrer que 7 divise $2Sn$ et en déduire, en utilisant une combinaison linéaire, que 7 divise S_n.

c. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que 7 divise S_n.