Devoir à la maison n°6

À rendre avant le mardi 4 avril 2023

Exercice 1. — On pose $z = -5\sqrt{3} + 5\,\mathrm{i}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que z^n est un réel si et seulement si 6 divise n.

Exercice 2. — Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on désigne par A le point d'affixe 1 et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{\overline{z}-1}$$

1. Soit B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 2 - 2\mathrm{i}$.
   - **a.** Calculer l'affixe $z_{\mathrm{B}'}$ du point B′ image de B par la transformation f.
   - **b.** Montrer que le point B′ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   - **c.** Calculer les longueurs AB, AB′ et BB′ et en déduire que (AB′) est perpendiculaire à (AB).
2. Déterminer l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Soit $z \in \mathbb{U}$. On note M le point d'affixe z et z' l'affixe de l'image M' de M par f.
   - **a.** En utilisant les formules d'Euler, démontrer que $z' = -z$.
   - **b.** Que représente géométriquement le point M' pour le point M ?
5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \notin \mathbb{R}$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un imaginaire pur non nul.

   En déduire que, pour tout point M n'appartenant pas à l'axe des abscisses,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}\,,\overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

6. Étant donné un point D du plan n'appartenant pas à l'axe des abscisses, donner une méthode de construction de son image D′ par f.

   On illustrera cette méthode en la mettant en application sur un exemple de son choix.

Exercice 3 (facultatif). — Soit a, b et c trois entiers tels que $ab + bc + ca = 1$. Montrer que $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ est le carré d'un entier.

Exercice 4 (facultatif). — Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$.