Devoir à la maison n°5

À rendre le jeudi 02 février 2023

Exercice 1. — On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}.$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont des entiers non tous nuls et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \text{PGCD}(u_n, v_n)$.

1. Déterminer d_0.

2. On admet que $u_5 = 782$ et $v_5 = 2\,343$.
En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer d_5.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n divise d_{n+1}.

4. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n - v_n = 3$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \in \{1, 3\}$.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 5u_n = 4u_{n+1} - v_{n+1} \\ 5v_n = -3u_{n+1} + 2v_{n+1} \end{cases}$.

d. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_{n+1} divise d_n.

6. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont premiers entre eux.

7. Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n soit un multiple de 3 ?

Exercice 2 (facultatif). — Soit a, b et c des entiers naturels non nuls. On suppose que a et b sont premiers entre eux et qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $ab = c^n$. Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $a = u^n$ et $b = v^n$.