Corrigé du devoir à la maison n°4

Partie A – Exemples et contre-exemples de matrices diagonalisables

1. On peut écrire $O_n = I_n O_n I_n^{-1}$ et O_n est diagonale donc O_n est diagonalisable. De même, $I_n = I_n I_n I_n^{-1}$ est I_n est diagonale donc I_n est diagonalisable.

2. De manière générale, si M est une matrice diagonale d'ordre n alors $M = I_n M I_n{-1}$ donc M est diagonalisable.

3. On considère La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible d'ordre 2.

a. Par propriété, $P^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b. On en déduit que

$$\begin{aligned} P^{-1}NP &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c. Raisonnons par l'absurde en supposant que N est diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D telle que $N = PDP^{-1}$. Il s'ensuit que $D = P^{-1}NP$ donc,d'après la question précédente, la matrice $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}$ est diagonale. Ceci impose que $-c^2 = d^2 = 0$ donc $c = d = 0$. Mais alors $\det(P) = ad - bc = 0$ ce qui est absurde puisque P est inversible.
Ainsi, on conclut que N n'est pas diagonalisable.

Partie B – Théorème spectral pour les matrices d'ordre 2

1. Si $b = 0$ alors M est diagonale donc, par le résultat de la question **A.2.**, M est diagonalisable.

2. a. Par définition, $d = ac - b^2$.

b. Le discriminant de $X^2 - tX + d$ est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-t)^2 - 4 \times A \times d = (-a-c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \end{aligned}$$

Or, comme $b \neq 0$, $b^2 > 0$ donc $\Delta > 0$. Ainsi, le polynôme $X^2 - tX + d$ possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2.

c. On a

$$\begin{aligned} M^2 - tM + dI_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - (a+c) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + (ac - b^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ba + cb & b^2 + c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+c)a & (a+c)b \\ (a+c)b & (a+c)c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ac - b^2 & 0 \\ 0 & ac - b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - (a^2 + ca) + ac - b^2 & ab + bc - (ab + cb) \\ ba + cb - (ab + cb) & b^2 + c^2 - (ac + c^2) + ac - b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $M^2 - tM + dI_2 = O_2$.

Comme λ_1 et λ_2 sont les deux racines réelles de $X^2 - tX + d$, on peut factoriser ce polynôme sous la forme $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Or,

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - \lambda_2 X - \lambda_1 X + \lambda_1\lambda_2 = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$$

donc, en identifiant les coefficients, on aboutit à $t = \lambda_1 + \lambda_2$ et $d = \lambda_1\lambda_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(M - \lambda_1 I_2)(M - \lambda_2 I_2) &= M^2 - \lambda_2 M - \lambda_1 M + \lambda_1\lambda_2 I_2\\ &= M^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)M + \lambda_1\lambda_2 I_2\\ &= M^2 - tM + dI_2\end{aligned}$$

donc $(M - \lambda_1 I_2)(M - \lambda_2 I_2) = O_2$.

d. Supposons que $M - \lambda_1 I_2$ est inversible et notons B son inverse. Alors, comme $(M-\lambda_1 I_2)(M-\lambda_2 I_2) = O_2$, $B(M-\lambda_1 I_2)(M-\lambda_2 I_2) = BO_2 = O_2$ donc $I_2(M-\lambda_2 I_2) = O_2$ donc $M - \lambda_2 I_2 = O_2$. Ainsi, $M = \lambda_2 I_2$ donc M est diagonale et, en particulier, $b = 0$, ce qui est exclu.

De même, supposons que $M - \lambda_2 I_2$ est inversible et notons C son inverse. Alors, comme $(M - \lambda_1 I_2)(M - \lambda_2 I_2) = O_2$, $(M - \lambda_1 I_2)(M - \lambda_2 I_2)C = O_2 C = O_2$ donc $(M - \lambda_2 I_2)I_2 = O_2$ donc $M - \lambda_1 I_2 = O_2$. Ainsi, $M = \lambda_1 I_2$ et on aboutit à la même conclusion.

Ainsi, $M - \lambda_1 I_2$ et $M - \lambda_2 I_2$ ne sont pas inversibles.

e. Comme $M - \lambda_1 I_2$ n'est pas inversible, par le théorème 55 du cours, l'équation $(M - \lambda_1 I_2)X = O_2$ ne possède pas une unique solution. Or, $X = O_{2,1}$ est solution de cette équation donc il existe une autre solution $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \neq O_{2,1}$. Dès lors, $(M - \lambda_1 I_2)X_1 = O_{2,1}$ donc $MX_1 - \lambda_1 X_1 = O_{2,1}$ et ainsi $MX_1 = \lambda_1 X_1$.

On montre de même l'existence de X_2.

3. a. Comme P n'est par inversible, $\det P = 0$ c'est-à-dire $u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0$.

Si $v_1 = 0$ alors $u_1 v_2 = 0$ et, comme $X_1 \neq O_{2,1}$, $u_1 \neq 0$ donc $v_2 = 0$. Il s'ensuit que $u_2 = \frac{u_2}{u_1} \times u_1$ et $v_2 = 0 = \frac{u_2}{u_1} v_1$ donc $X_2 = \frac{u_2}{u_1} X_1$.

Si $v_1 \neq 0$ alors, comme $v_1 u_2 = u_1 v_2$, $u_2 = \frac{v_2}{v_1} u_1$ et donc, de la même façon, $X_2 = \frac{v_2}{v_1} X_1$.

Dans tous les cas, il existe un réel k tel que $X_2 = kX_1$.

b. Comme $X_2 = kX_1$, $MX_2 = M(kX_1) = k(MX_1)$ donc, par définition de X_1 et X_2, $\lambda_2 X_2 = k(\lambda_1 X_1) = \lambda_2(kX_1) = \lambda_1 X_2$. Ainsi, $\lambda_2 u_2 = \lambda_1 u_2$ et $\lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2$. Or, $X_2 \neq O_{2,1}$ donc l'un (au moins) des deux nombres u_2 ou v_2 est non nul. Supposons par exemple de que $u_2 \neq 0$. Alors, en divisant l'égalité $\lambda_2 u_2 = \lambda_1 u_2$ par u_2, on aboutit à $\lambda_2 = \lambda_1$.

c. Ceci est absurde car les deux racines de $X^2 - tX + d$ sont distinctes donc on conclut que P est inversible.

4. On a

$$\begin{aligned}PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{u_1 v_2 - v_1 u_2} \begin{pmatrix} v_2 & -u_2 \\ -v_1 & u_1 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{u_1 v_2 - v_1 u_2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_2 & -\lambda_1 u_2 \\ -\lambda_2 v_1 & \lambda_2 u_1 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{u_1 v_2 - v_1 u_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 v_2 - \lambda_2 u_2 v_1 & -\lambda_1 u_1 u_2 + \lambda_2 u_2 u_1 \\ \lambda_1 v_1 v_2 - \lambda_2 v_2 v_1 & -\lambda_1 v_1 u_2 + \lambda_2 v_2 u_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or, par définition, $MX_1 = \lambda_1 X_1$ et $MX_2 = \lambda_2 X_2$ donc $\begin{pmatrix} au_1 + bv_1 \\ bu_1 + cv_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} au_2 + bv_2 \\ bu_2 + cv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 u_2 \\ \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{u_1v_2 - v_1u_2} \begin{pmatrix} (au_1+bv_1)v_2 - (au_2+bv_2)v_1 & -(au_1+bv_1)u_2 + (au_2+bv_2)u_1 \\ (bu_1+cv_1)v_2 - (bu_2+cv_2)v_1 & -(bu_1+cv_1)u_2 + (bu_2+cv_2)u_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1v_2 - v_1u_2} \begin{pmatrix} a(u_1v_2 - u_2v_1) & b(-v_1u_2 + v_2u_1) \\ b(u_1v_2 - u_2v_1) & c(-v_1u_2 + v_2u_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $PDP^{-1} = M$ et donc, comme D est diagonale, M est diagonalisable.
On a donc montrer que toute matrice symétrique (réelle) d'ordre 2 est diagonalisable.

Partie C – Exemple d'application

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_n + 4b_n \\ 4a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = AX_n$$

en posant $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $X_n = A^n X_0$ ».
Comme $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$, la proposition H_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que H_k est vraie. Alors,

$$X_{k+1} = AX_k = A(A^k X_0) = (AA^k)X_0 = A^{k+1} X_0$$

donc H_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Comme A est symétrique (réelle), les résultats de la **Partie B** assurent que $A = PDP^{-1}$ avec

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où λ_1 et λ_2 sont les deux racines de réelles de $X^2 - tX + d$ avec $t = 7 + 1 = 8$ et $d = 7 \times 1 - 4 \times 4 = -9$;
- $P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ où $Y_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sont des solutions non nulles respectivement de $AX = \lambda_1 X$ et $AX = \lambda_2 X$.

Or, le discriminant de $X^2 - 8X - 9$ est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 100$ donc $\lambda_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{100}}{2\times 1} = -1$ et $\lambda_2 = \frac{-(-8)+\sqrt{100}}{2\times 1} = 9$ donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Pour trouver Y_1, on cherche une solution non nulle de $AX = -X$. Or, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = -x \\ 4x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 0.$$

On peut donc prendre, par exemple, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour trouver Y_2, on cherche une solution non nulle de $AX = 9X$. Or, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$AX = 9X \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 9x \\ 4x + y = 9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

On peut donc prendre, par exemple, $Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $Q_n : A^n = PD^nP^{-1}$.
Comme $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, Q_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_k est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc Q_{k+1} est vraie.
On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 9^n & 0 \end{pmatrix}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2(-1)^{n+1} \\ 2 \times 9^n & 9^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n + 4 \times 9^n & 2(-1)^{n+1} + 2 \times 9^n \\ -2(-1)^n + 2 \times 9^n & 4(-1)^n + 9^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^nX_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n + 4 \times 9^n & 2(-1)^{n+1} + 2 \times 9^n \\ -2(-1)^n + 2 \times 9^n & 4(-1)^n + 9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 6 \times 9^n \\ 2(-1)^n + 3 \times 9^n \end{pmatrix}$$

donc

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 6 \times 9^n}{5} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2(-1)^n + 3 \times 9^n}{5}.$$

Partie D. Si on reprend la démonstration du théorème spectral, on voit que l'argument clé est le fait que si $b \neq 0$ alors le discriminant de $X^2 - tX + d$ est strictement positif. Une condition nécessaire pour trouver un contre-exemple dans le cas complexe est donc de déterminer a, b et c tels que $(a - c)^2 + 4b^2$ ne soit pas strictement positif. C'est par exemple le cas si $a = 2$, $c = 0$ et $b = \mathrm{i}$. Considérons donc la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Supposons, par l'absurde, que M soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice diagonale D à coefficients complexes et une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes telles que $M = PDP^{-1}$ c'est-à-dire $D = P^{-1}MP$.

Or, comme dans la **Partie A**, le calcul montre que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a(-\mathrm{i}\,b+2d)+\mathrm{i}\,cd & -\mathrm{i}\,b^2+\mathrm{i}\,d^2+2bd \\ \mathrm{i}\,a^2-\mathrm{i}\,c^2-2ac & b(\mathrm{i}\,a-2c)-\mathrm{i}\,cd \end{pmatrix}$$

donc, comme cette matrice est diagonale, $-\mathrm{i}\,b^2+\mathrm{i}\,d^2+2bd = 0$ et $\mathrm{i}\,a^2-\mathrm{i}\,c^2-2ac$.

Or, $-\mathrm{i}\,b^2+\mathrm{i}\,d^2+2bd = -\mathrm{i}\,(b^2+2\,\mathrm{i}\,bd-d^2) = -\mathrm{i}\,(b+\mathrm{i}\,d)^2$ et $\mathrm{i}\,a^2-\mathrm{i}\,c^2-2ac = \mathrm{i}\,(a^2+2\,\mathrm{i}\,ac-c^2) = \mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\,c)^2$. Ainsi, $\mathrm{i}\,(b+\mathrm{i}\,d)^2 = 0$ et $\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\,c)^2 = 0$ donc $b = -\mathrm{i}\,d$ et $a = -\mathrm{i}\,c$. Il s'ensuit que $\det P = -\mathrm{i}\,c \times d - (\mathrm{i}\,d)c = -\mathrm{i}\,cd + \mathrm{i}\,dc = 0$ ce qui contredit le fait que P est inversible.

Ainsi, M n'est pas diagonalisable bien qu'elle soit symétrique. Le théorème spectral n'est donc plus vrai pour les matrices à coefficients complexes.