Corrigé du devoir à la maison n°3

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $n = n + \mathrm{i} \times 0 \times \sqrt{3}$ et $(n\,;0) \in \mathbb{Z}^2$ donc $n \in A$. Ainsi, $\mathbb{Z} \subset A$.

2. Par propriété des nombres complexes, $z = z'$ si et seulement si $a = c$ et $b\sqrt{3} = d\sqrt{3}$ ce qui équivaut, comme $\sqrt{3} \neq 0$, à $a = c$ et $b = d$.

3. Par définition, il existe des entiers a, b, c et d tels que $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ et $z' = c + \mathrm{i}d\sqrt{3}$. Dès lors :

- $z + z' = a + \mathrm{i}b\sqrt{3} + c + \mathrm{i}d\sqrt{3} = (a+c) + \mathrm{i}(b+d)\sqrt{3}$ avec $(a+c\,;b+d) \in \mathbb{Z}^2$ donc $z + z' \in A$;
- $z - z' = a + \mathrm{i}b\sqrt{3} - \left(c + \mathrm{i}d\sqrt{3}\right) = (a-c) + \mathrm{i}(b-d)\sqrt{3}$ avec $(a-c\,;b-d) \in \mathbb{Z}^2$ donc $z - z' \in A$;
- $zz' = \left(a + \mathrm{i}b\sqrt{3}\right)\left(c + \mathrm{i}d\sqrt{3}\right) = ac + \mathrm{i}(ad)\sqrt{3} + \mathrm{i}(bc)\sqrt{3} - 3bd = (ac - 3bd) + \mathrm{i}(ad+bc)\sqrt{3}$ avec $(ac - 2bd\,;ad+bc) \in \mathbb{Z}^2$ donc $zz' \in A$;
- $\overline{z} = \overline{a + \mathrm{i}b\sqrt{3}} = a - \mathrm{i}b\sqrt{3} = a + \mathrm{i}(-b)\sqrt{3}$ avec $(a\,;-b) \in \mathbb{Z}^2$ donc $\overline{z} \in A$.

4. On raisonne par récurrence. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $z^n \in A$ ».
Comme $z^0 = 1 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset A$, $z^0 \in A$ donc P_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $z^k \in A$ et, comme $z \in A$, d'après la question précédente, $z^k \times z \in A$ i.e. $z^{k+1} \in A$ donc P_{k+1} est vraie.
Ainsi, on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n \in A$.

5. L'affirmation est fausse. Par exemple, $2 \in A$ mais $\frac{1}{2} \notin A$ car, par définition, la partie réelle d'un élément de A est un entier.

6. a. Soit $z \in A$. Alors, il existe deux entiers a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ donc

$$N(z) = z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = a^2 + (b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2.$$

Comme a et b sont des entiers, $a^2 + 3b^2$ est un entier positif donc $N(z) \in \mathbb{N}$.

b. Soit $(z, z') \in A^2$. Alors, grâce aux propriétés de la conjugaison,

$$N(zz') = (zz')\overline{(zz')} = z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'} = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = N(z)N(z').$$

c. Soit $z \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $N(z^n) = z^n\overline{z^n} = z^n\overline{z}^n = (z\overline{z})^n = N(z)^n$.

7. a. Supposons que $\frac{1}{z} \in A$. Alors, d'après la question **6.b.**, $1 = N(1) = N(z \times \frac{1}{z}) = N(z)N(\frac{1}{z})$. De plus, d'après la question **6.c.**, $N(z)$ et $N(\frac{1}{z})$ sont des entiers naturels donc $N(z) = 1$ (et $N(\frac{1}{z}) = 1$).
Réciproquement, supposons que $N(z) = 1$. Alors, $z\overline{z} = 1$ donc $\frac{1}{z} = \overline{z} \in A$ d'après la question **3.**.
Ainsi, on a bien montrer que $\frac{1}{z} \in A$ si et seulement si $N(z) = 1$.

b. Soit $z \in A$ un complexe non nul. Alors, il existe deux entiers a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$. On a vu (question **6.a.**) que $N(z) = a^2 + 3b^2$. Supposons que $\frac{1}{z} \in A$ alors, par la question précédente, $N(z) = 1$ donc $a^2 + 3b^2 = 1$. Remarquons que si $b \neq 0$ alors, comme b est un entier, $|b| \geqslant 1$ donc $a^2 + 3b^2 \geqslant 3b^2 \geqslant 3 \times 1^2 = 3$, ce qui est exclu puisque $a^2 + 3b^2 = 1$. Ainsi, $b = 0$ et, par suite, a^1 donc $a = 1$ ou $a = -1$. On en déduit que $z = 1$ ou $z = -1$. Inversement, 1 et -1 sont des entiers donc des éléments de A et leurs inverses respectifs 1 et -1 sont également dans A. Ainsi, l'ensemble des éléments inversibles de A est $\{1\,;-1\}$.

8. **a.** Si (P_1) est vraie alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) possède une solution donc, en particulier, pour $n = 1$, (E_1) possède une solution. Ainsi, (P_1) implique (P_2).

Réciproquement, supposons que (P_2) soit vraie. Ainsi, il existe deux entiers u et v tels que $u^2 + 3v^2 = k$. Posons alors $w = u + \mathrm{i}v\sqrt{3} \in A$, de sorte que $N(w) = u^2 + 3v^2 = k$, et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = w^n$. Alors, d'après la question **4.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in A$ donc il existe des entiers u_n et v_n tels que $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n\sqrt{3}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question **6.c.**,

$$u_n^2 + 3v_n^2 = N(z_n) = N(w^n) = N(w)^n = k^n$$

donc $(u_n\,; v_n)$ est une solution de (E_n). Ainsi, (P_2) implique (P_1).

On a donc bien montré que (P_1) et (P_2) sont équivalentes.

b. La proposition (P_3) n'est en général pas équivalente aux précédentes. Par exemple, si $u = 2$, l'équation $(E_1) : x^2 + 3y^2 = 2$ n'est pas de solution car, si $y \neq 0$ alors $x^2 + 3y^2 \geqslant 3y^2 \geqslant 3$ donc $y = 0$ mais $x^2 = 2$ n'a pas de solution de $\mathbb{Z}$. Cependant, l'équation $(E_2) : x^2+3y^2 = 2^2$ possède clairement la solution $(2\,;0)$. Ainsi, pour $u = 2$, la proposition (P_3) est vraie mais la proposition (P_1) est fausse donc (P_3) n'implique par (P_1).