

Devoir à la maison n°3

À rendre le mardi 14 novembre 2022

On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs. Ainsi,

$$A = \{a + ib\sqrt{3} \mid (a; b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Justifier que $\mathbb{Z} \subset A$.
2. Soit a, b, c et d des entiers relatifs. On considère les deux éléments $z = a + ib\sqrt{3}$ et $z' = c + id\sqrt{3}$ appartenant à A . Montrer que $z = z'$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
3. Soit z et z' deux éléments de A . Montrer que $z + z'$, $z - z'$, zz' et \bar{z} appartiennent à A .
4. Soit $z \in A$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n \in A$.
5. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « pour tout élément non nul z de A , le nombre complexe $\frac{1}{z}$ appartient à A ».
6. On pose, pour tout $z \in A$, $N(z) = z\bar{z}$.
 - a. Montrer que, pour tout $z \in A$, $N(z) \in \mathbb{N}$.
 - b. Montrer que, pour tout $(z, z') \in A^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
 - c. Soit $z \in A$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(z^n) = N(z)^n$.
7.
 - a. Soit z un élément non nul de A . Montrer que $\frac{1}{z}$ appartient à A si et seulement si $N(z) = 1$.
 - b. En déduire l'ensemble des éléments non nuls $z \in A$ tels que $\frac{1}{z} \in A$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$(E_n) : x^2 + 3y^2 = k^n$$

d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

- a. En utilisant certaines des questions précédentes, montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - (P₁) : « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) possède au moins une solution » ;
 - (P₂) : « (E_1) possède au moins une solution ».
- b. Les propositions P₁ et P₂ sont-elles équivalentes à la proposition suivante ?
 - (P₃) : « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (E_n) possède au moins une solution ».