Corrigé du devoir à la maison n°2

Exercice 1.

1. L'équation (E_2) est $2^n = 1! + 1 = 2$ donc l'unique solution de (E_2) est $n = 1$.
L'équation (E_3) est $3^n = 2! + 1 = 3$ donc l'unique solution de (E_3) est $n = 1$.
L'équation (E_4) est $4^n = 3! + 1 = 7$ donc l'ensemble des solutions de (E_4) est vide (car 4^n est pair car $n > 0$ alors que 7 est impair).
L'équation (E_5) est $5^n = 4! + 1 = 25$ donc l'unique solution de (E_5) est $n = 2$.

2. a. Comme $a \geqslant 3$, 2 est compris entre 1 et $a-1$ donc $(a-1)$ est pair. Dès lors, $(a-1)!+1$ est impair. Ainsi, a^n est impair et donc a est impair (car si a est pair alors 2 divise a donc 2 divise $a \times a^{n-1} = a^n$ et donc a^n est pair).

b. Comme a est impair, $a - 1$ est pair donc il existe donc un entier q tel que $a - 1 = 2q$. De plus, comme $a \geqslant 6$, $q \geqslant 3$. Ainsi, 2, q et $2q$ sont trois entiers distincts compris entre 1 et $2q$ donc $2 \times q \times 2q$ divise $(2q)!$, ce qui revient à dire que $(q-1)^2$ divise $(q-1)!$.

c. Comme $a \neq 1$, d'après les propriétés des sommes des termes des suites géométriques, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}$ donc $\displaystyle(a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1$.
D'après la question précédente, il existe un entier Q tel que $(a-1)! = Q(a-1)^2$ et, par définition, $(a-1)! = a^n - 1$ donc $a^n - 1 = Q(a-1)^2$. Dès lors, on déduit de la première partie de la question que $\displaystyle(a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = Q(a-1)^2$ donc, en divisant par $a - 1 \neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = Q(a-1)$. Ainsi, $a-1$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

d. Comme $a-1$ divise $a-1$, pa définition, $a \equiv 1\ [a-1]$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1^k\ [a-1]$ c'est-à-dire $a^k \equiv 1\ [a-1]$. En sommant ces congruences, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} 1\ [a-1] \equiv n\ [a-1]$.

e. On a vu dans la question **2.c.** que $a-1$ divise $a-1$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k \equiv 0\ [a-1]$.
Par suite, $n \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^k\ [a-1] \equiv 0\ [a-1]$ donc $a-1$ divise n.
Comme $n > 0$ et $a - 1 > 0$, on en déduit que $n \geqslant a-1$. En particulier, comme $a \geqslant 1$, $a^{a-1} > (a-1)^{a-1}$. Or,

$$(a-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (a-1) \leqslant \underbrace{(a-1) \times (a-1) \times \cdots \times (a-1)}_{a-1 \text{ fois}} = (a-1)^{a-1}$$

donc

$$a^{a-1} < a^n = (a-1)! + 1 < (a-1)^{a-1} + 1$$

et donc $a^{a-1} \leqslant (a-1)^{a-1}$ car ce sont des entiers. Ceci est absurde car $a > a-1 > 0$ et la fonction $x \longmapsto x^{a-1}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty]$ donc $a^{a-1} > (a-1)^{a-1}$.
On conclut donc que l'équation (E_a) n'a pas de solution pour $a > 5$.

Exercice 2.

1. **a.** L'équation (F_0) est $x^2 = 2^0 - 1$ c'est-à-dire $x^2 = 0$ donc l'unique solution de (F_0) est 0.

L'équation (F_1) est $x^2 = 2^1 - 1$ c'est-à-dire $x^2 = 1$ donc l'unique solution (dans $\mathbb{N}$) de (F_1) est 1.

b. On peut écrire $2^n = 4 \times 2^{n-2}$ et, comme $n \geqslant 2$, 2^{n-2} est un entier. Ainsi, 4 divise 2^n donc $2^n \equiv 0$ [4]. Par suite, $2^n - 1 \equiv -1$ [4] $\equiv 3$ [4]. Comme $0 \leqslant 3 < 4$, on conclut que le reste de $2^n - 1$ modulo 4 est 3..

c. Le tableau suivant donne les restes modulo 4 :

Reste de m modulo 4	0	1	2	3
Reste de m^2 modulo 4	0	1	0	1

Ainsi, les restes possibles pour un carré modulo 4 sont 0 et 1.

d. Si (F_n) possède une solution $x \in \mathbb{N}$, alors $x^2 = 2^n - 1$ donc x^2 et $2^n - 1$ ont même reste modulo 4 ce qui n'est pas possible d'après les deux questions précédentes. Ainsi, on conclut que, pour tout entier $n \geqslant 2$, (F_n) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

2. **a.** L'équation (G_0) est $x^2 = 2^0 + 1$ c'est-à-dire $x^2 = 1$ donc l'unique solution (dans $\mathbb{N}$) de (G_0) est 1.

L'équation (G_1) est $x^2 = 2^1 + 1$ c'est-à-dire $x^2 = 2$ donc l'ensemble des solutions de (G_1) est vide car l'unique réel positif x tel que $x^2 = 2$ est $x = \sqrt{2}$ qui n'est pas entier.

b. Comme $n > 0$, 2^n est pair donc $2^n + 1$ est impair. Ainsi, a^2 est impair et donc a est impair.

c. Comme $a^2 = 2^n + 1$, $a^2 - 1 = 2^n$ donc $(a-1)(a+1) = 2^n$. L'entier a étant impair, $a - 1$ est pair donc il existe un entier k tel que $a - 1 = 2k$. De plus, comme $a \geqslant 2$, $k > 0$. Dès lors, $(a-1)(a+1) = 2k(2k+2) = 2^2k(k+1)$ donc $2^2k(k+1) = 2^n$ et donc $k(k+1) = 2^{n-2}$.

d. Si k est impair alors k est un diviseur impair de 2^{n-2} donc $k = 1$ et ainsi $a = 2k+1 = 3$. Dès lors, $2^{n-2} = 2$ donc $n = 3$.

Si k est pair alors $k + 1$ est impair et, comme $k > 0$, $k + 1 > 0$ ce qui est absurde car 2^{n-2} n'a pas de diviseur impair autre que 1.

Ainsi, si $n \geqslant 4$, l'ensemble des solutions de (G_n) est vide. Par ailleurs, $2^3 + 1 = 9 = 3^2$, l'unique solution de (G_3) est 3.

3. Supposons que a soit une solution de (H_n) c'est-à-dire que $a^m = 2^n + 1$. Alors, $a^m - 1 = 2^n$. Or, comme on l'a vu dans l'exercice 1, $a^m - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{m-1} a^k$ donc $(a-1)\sum_{k=0}^{m-1} a^k = 2^n$.

Si a est pair alors $a - 1$ est impair et, comme précédemment, $a - 1 = 1$ donc $a = 2$. Ainsi, $2^m = 2^n + 1$ donc $m > n$. De plus, $2^m - 2^n = 1$ donc $2^n(2^{m-n} - 1) = 1$ avec $2^{m-n} \in \mathbb{N}$ car $m > n$. Ainsi, $2^n = 1$ donc $n = 0$ et $2^{m-n} - 1 = 1$ donc $m = 1$. Réciproquement, si $m = 1$ et $n = 0$, on a bien $2^m = 2 = 2^n + 1$.

Si a est impair alors $a \equiv 1$ [2] donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1$ [2] donc $\sum_{k=0}^{m-1} a^k \equiv m$ [2] $\equiv 1$ [2] car m est impair. Ainsi, $\sum_{k=0}^{m-1} a^k$ est un diviseur impair de 2^n donc $\sum_{k=0}^{m-1} a^k = 1$. Comme a est impair, $a \geqslant 1$ donc $a = 1$ et $m - 1 = 0$ c'est-à-dire $m = 1$. Or, $1^1 = 1 < 2^n + 1$ quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$ donc a n'est pas solution de (H_n).

On conclut que l'ensemble des solutions de (H_n) est vide pour tous entiers n et m tels que $(n, m) \neq (0, 1)$ et, si $m = 1$, l'unique solution de H_0 est 2.