Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 6 octobre 2022

Exercice 1. Soit a un entier naturel au moins égal à 2. On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $m!$ désigne le produit des entiers naturels de 1 à m c'est-à-dire $m! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m$.

On considère l'équation

$$(E_a) : a^n = (a-1)! + 1$$

d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre les équations (E_2), (E_3), (E_4) et (E_5).

2. On suppose désormais que $a \geqslant 6$. On souhaite montrer que (E_a) n'a pas de solution. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $n \in \mathbb{N}^*$ est une solution de (E_a).

- **a.** Montrer que a est impair.
- **b.** Montrer que $(a-1)^2$ divise $(a-1)!$. Pour cela, on aurait intérêt à utiliser le fait que $a-1$ est pair et qu'il existe donc un entier q tel que $a - 1 = 2q$.
- **c.** Justifier que $(a-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1$ et en déduire que $a-1$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.
- **d.** Justifier que $a \equiv 1\ [a-1]$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k \equiv n\ [a-1]$.
- **e.** Montrer que $a-1$ divise n puis conclure.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On considère l'équation $(F_n) : x^2 = 2^n - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$.

- **a.** Résoudre (F_0) et (F_1).
  On se place désormais dans le cas où $n \geqslant 2$.
- **b.** Déterminer le reste de $2^n - 1$ modulo 4.
- **c.** À l'aide d'un tableau de restes, déterminer les restes possibles pour le carré d'un entier modulo 4.
- **d.** Que peut-on conclure des deux questions précédentes ?

2. On considère l'équation $(G_n) : x^2 = 2^n + 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$.

- **a.** Résoudre (G_0) et (G_1).
  On se place désormais dans le cas où $n \geqslant 2$. Supposons que $a \in \mathbb{N}$ soit une solution de (G_n) c'est-à-dire que $a^2 = 2^n + 1$.
- **b.** Justifier que a est impair.
- **c.** En déduire l'existance d'un entier $k > 0$ tel que $k(k+1) = 2^{n-2}$.
- **d.** Résoudre (G_n).

3. (facultatif) Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier impair. Résoudre l'équation $(H_n) : x^m = 2^n + 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$.