

Devoir à la maison n°1

À rendre le jeudi 22 septembre 2022

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 12.$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 9$.
 - a. Calculer u_1 , u_2 et u_3 et vérifier que ces entiers sont tous divisibles par 3.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 3.
2. On suppose a quelconque (mais toujours entier) et on considère un diviseur d de 12. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, d divise u_n ;
 - d divise a .

Exercice 2. Soit a et b deux entiers tels que $b > 0$. On note q le reste dans la division euclidienne de $a - 1$ par b et Q le reste dans la division euclidienne de $ab - 1$ par b^2 .

1. Déterminer q et Q dans chacun des cas suivants :
 - a. $a = 17$ et $b = 5$;
 - b. $a = 29$ et $b = 12$;
 - c. $a = 125$ et $b = 17$.
2. Conjecturer un lien entre Q et q puis démontrer cette conjecture.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de q , le quotient dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

Exercice 3 (facultatif). Soit a un entier naturel et b un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $2^b - 1$ ne divise pas $2^a + 1$.