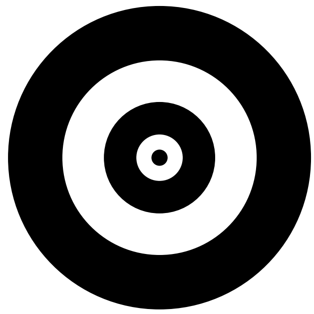
♦ Chapitre 14. — Exemples de lois de probabilité à densité continue

I. — Un exemple pour commencer

Un joueur lance une fléchette sur une cible de rayon 20 cm partagée en 5 secteurs délimités par les cercles de rayons 1 cm, 3 cm, 7 cm et 13 cm. En supposant que la fléchette atteint un point au hasard sur la cible, quelle est la probabilité qu'elle atteigne chacun des 5 secteurs ?



II. — Généralités

Notation. — Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, on convient de désigner par $\llbracket a\,;b\rrbracket$ n'importe lequel des quatre intervalles $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ et de désigner par $\llbracket a\,;+\infty[$ n'importe lequel des deux intervalles $[a\,;+\infty[$ et $]a\,;+\infty[$.

Définition 1

Soit I un intervalle de la forme $\llbracket a\,;b\rrbracket$ ou $\llbracket a\,;+\infty[$ et f une fonction **continue** et **positive** sur I. On dit que f est une densité de probabilité sur I si

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ dans le cas où } I = \llbracket a\,;b\rrbracket \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ dans le cas où } I = \llbracket a\,;+\infty[.$$

Remarque 2. — On peut également définir une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ tout entier : il s'agit d'une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Définition 3

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I. On s'intéresse à une expérience aléatoire sur un univers Ω modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω. On considère une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans I. On dit que X suit la loi de probabilité de densité f si, pour tout intervalle J inclus dans I, $\mathbf{P}(X \in J)$ est égale à l'aire de la partie du plan définie comme l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $x \in J$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Remarque 4. — La notation $(X \in J)$ est une notation abrégée (et abusive) pour désignée l'ensemble des ω de Ω tels que $X(\omega) \in J$.

Dans le cas où $J = [c\,;d]$ (resp. $J =]c\,;d]$, $J = [c\,;d[$, $J =]c\,;d[$), l'évènement $(X \in J)$ se note aussi $(c \leqslant X \leqslant d)$ (resp, $(c < X \leqslant d)$, $(c \leqslant X < d)$, $(c < X < d)$).

Dans le cas où $J = [c\,;+\infty[$ (resp. $J =]c\,;+\infty[$), l'évènement $(X \in J)$ se note aussi $(X \geqslant c)$ (resp, $(X > c)$).

Dans la suite de ce paragraphe, on se place dans les hypothèses de la définition 1.

Définition 5

1. Pour tout intervalle $J = [\![c\,; d]\!]$ inclus dans I, $\mathbf{P}(X \in J) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$. En particulier, cette probabilité est la même que les crochets soient ouverts ou fermés (ou, si on utilise la notation avec les inégalités, la probabilité est la même que les inégalités soient larges ou strictes).
2. Pour tout $c \in I$, $\mathbf{P}(X = c) = 0$.
3. Pour tous intervalles J et K inclus dans I,
$$\mathbf{P}(X \in J \cup K) = \mathbf{P}(X \in J) + \mathbf{P}(X \in K) - \mathbf{P}(X \in J \cap K).$$
En particulier, si J et K sont disjoints, alors $\mathbf{P}(X \in J \cup K) = \mathbf{P}(X \in J) + \mathbf{P}(X \in K)$.
4. Si J et K sont complémentaires dans I alors $\mathbf{P}(X \in J) = 1 - \mathbf{P}(X \in K)$.
5. Si I est la forme $[\![a\,; +\infty[$ et si J est un intervalle de la forme $[\![c\,; +\infty[$ inclus dans I alors
$$\mathbf{P}(X \in J) = \lim_{x \to +\infty} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 6.

1. Montrer que la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(t) = 4t^3$ est une densité de probabilité sur $[0\,;1]$. On suppose que X suit une loi de probabilité de densité f. Calculer $\mathbf{P}(X \in [0{,}25\,; 0{,}75[)$.
2. Déterminer le réel λ tel que la fonction f définie sur $[1\,; +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\lambda}{t^3}$ soit une densité de probabilité. On suppose que X suit une loi de probabilité de densité f (pour cette valeur de λ). Calculer alors $\mathbf{P}(X \in [1\,; 5[\cup [10\,; +\infty[)$.

Définition 7

Soit $J \subset I$ un intervalle tel que $\mathbf{P}(X \in J) \neq 0$ et K un intervalle inclus dans I. On définit la probabilité conditionnelle de $(X \in K)$ sachant $(X \in J)$ par $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = \dfrac{\mathbf{P}(X \in K \cap J)}{\mathbf{P}(X \in J)}$.

En particulier, si $K \subset J$ alors $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = \dfrac{\mathbf{P}(X \in K)}{\mathbf{P}(X \in J)}$ et si K et J sont disjoints (c'est-à-dire $K \cap J = \varnothing$) alors $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = 0$.

III. — Loi uniforme sur $[a\,; b]$

Définition 8

Soit $a < b$ deux réels. On dit qu'une variable aléatoire X suit un loi uniforme sur $[a\,; b]$ si la loi de X est la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\,; b]$.

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a\,; b]$ $(a < b)$. Alors, pour tout intervalle $[\![c\,; d]\!] \subset [a\,; b]$, $\mathbf{P}(X \in [\![c\,; d]\!]) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Convention. — On convient que « choisir un nombre au hasard dans un intervalle $[a\,;b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a\,;b]$. En d'autres termes, si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre au hasard et si on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu alors X suit un loi uniforme sur $[a\,;b]$.

Exemple 10. — On choisit un réel au hasard dans $]0\,;0,5[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu. Sachant que X est inférieur à 0,2, quelle est la probabilité que son deuxième chiffre après la virgule soit 1 ?

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I = [\,a\,;b\,[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a < b)$ alors l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Exemple 13. — Le temps d'attente en minutes à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant un loi uniforme sur $[0\,;30]$.

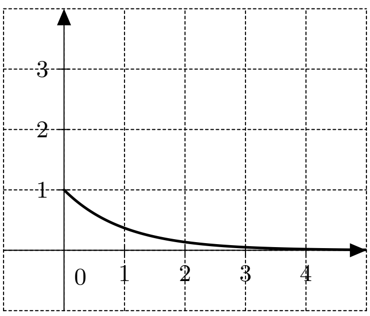
1. Un client se présente au guichet. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes.
2. Sachant qu'au bout de 10 minutes, le client n'a toujours pas été servi, quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes supplémentaires ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen à ce guichet ?

IV. — Lois exponentielles

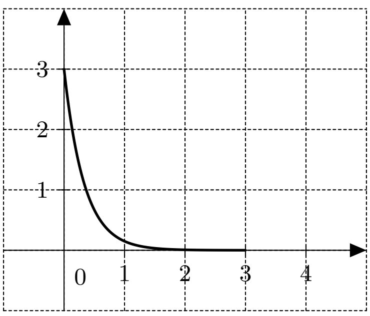
Théorème et définition 14

Soit λ un réel strictement positif. Alors, la fonction f_λ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$. Si une variable aléatoire suit une loi de probabilité de densité f_λ, on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

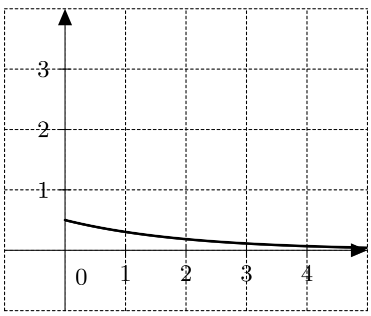
Remarque 15. — Le paramètre λ est égal à $f_\lambda(0)$. Ceci peut permettre de déterminer et/ou d'estimer λ graphiquement ou par le calcul lorsque ce paramètre est inconnu.



$\lambda = \ldots$



$\lambda = \ldots$



$\lambda = \ldots$

Exemple 16. — La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0006$. On choisit un composant au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure à 1000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que ce composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?

Théorème 17

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Alors, pour tous réels positifs a et h,

$$\mathbf{P}_{(X\geqslant a)}(X \geqslant a+h) = \mathbf{P}(X \geqslant h).$$

Démonstration de cours non exigible

Remarque 18. — Ce théorème justifie que la loi exponentielle soit aussi appelée *loi de durée de vie sans vieillissement* ou encore *loi sans mémoire.*

Exemple 19. — En reprenant les données de l'exemple 15, déterminer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 2000 heures sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 1500 heures.

Définition 20

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle I de la forme $[a\,;+\infty[$. On dit que X admet une espérance si la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand x tend vers $+\infty$ et la limite de F est alors appelée l'espérance de X, notée $E(X)$. Ainsi, en cas de convergence, on a $E(X) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 21. — Certaines variables aléatoires n'admettent pas d'espérance. C'est le cas par exemple d'une variable X dont la loi a pour densité $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1\,;+\infty[$ (exercice).

Théorème 22

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration de cours exigible

Exemple 23. — Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a. comprise entre 50 et 100 km ;
   b. supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3. Déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$. Si d est un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.