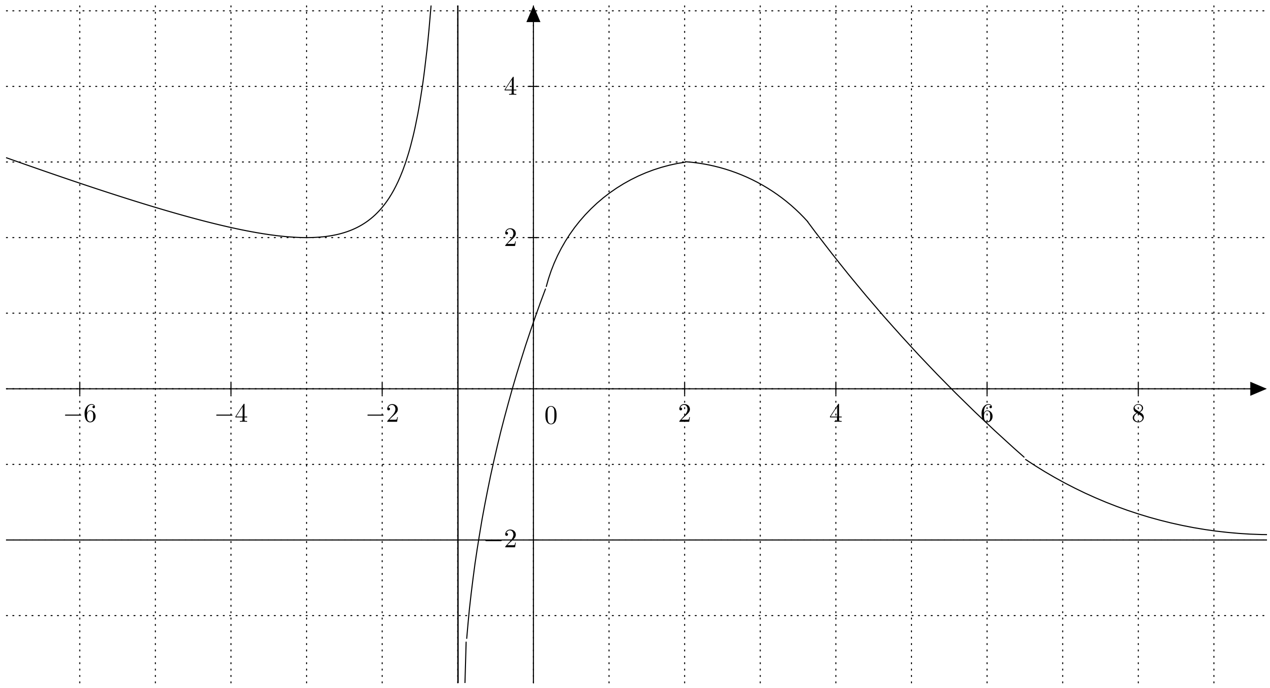
Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. Voici une courbe qui convient. On a également tracé les deux asymptotes d'équations $y = -2$ et $x = -1$.



2. 1) Comme $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Comme $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par différence, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

4) Comme $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. a. Étude au voisinage de $+\infty$. — Pour tout x différent de 0 et 2, $f(x) = \dfrac{x(3+\frac{1}{x})}{x(\frac{2}{x}-1)} = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme et différence, $\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}-1 = 0-1$ et, finalement, par quotient, $= \lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

Étude au voisinage de $-\infty$. — De la même façon, comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, par somme différence et quotient, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

Étude au voisinage de 2. — On a, d'une part, $\lim_{x\to 2} 3x+1 = 7$ et, d'autre part, $\lim_{x\to 2} 2-x = 0$. De plus, $2-x > 0$ si et seulement si $x < 2$ donc $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

b. On déduit de ce qui précède que la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Exercice 2.

1. **a.** Les droites (IJ) et (EF) sont incluses dans le plan (EFG) donc elles sont coplanaires. De plus, la parallèle à (EF) passant par I est (HG) et $J \notin (HG)$ donc (IJ) n'est pas parallèle à (EF). On conclut donc que les droites (IJ) et (EF) sont sécantes.

   b. Voir l'annexe.

2. **a.** Le point L appartient à la droite (EF) donc au plan (EFB). Ainsi, la droite (KL) est incluse dans (EFB). C'est également le cas de la droite (AB) donc (AB) et (KL) sont coplanaires. De plus, la parallèle à (AB) passant par L est (EF) et $K \notin (EF)$ donc (AB) et (KL) ne sont pas parallèles. On conclut donc que les droites (KL) et (AB) sont sécantes.

   b. Voir l'annexe.

3. Le point I appartient au plan (IJK) mais pas au plan (ABF) sont ces deux plans ne sont pas confondus.

   Le point K appartient aux plans (IJK) et (ABF) donc ces deux plans ne sont pas strictement parallèles.

   Ainsi, (IJK) et (ABF) sont sécants selon une droite Δ passant par K. De plus, le point L appartient à (IJ) donc au plan (IJK) et à la droite (EF) donc au plan (ABF). Ainsi, $K \in \Delta$ et donc, finalement, $\Delta = (KL)$.

4. Voir l'annexe 2. La section est le losange IJKMPQ (en rouge). On obtient le point N comme point d'intersection des droites (MK) et (AE) et le point O comme point d'intersection des droites (IJ) et(EH). On trace ensuite (ON) qui permet d'obtenir les points P et Q comme intersection de (ON) respectivement avec [AD] et [DH].

   Une autre construction est possible en utilisant le parallélisme des plans définis par les faces opposées du cube qui assure que (PM) est parallèle à (IJ) et que (PQ) est parallèle à (JK).

5. **a.** D'une part,

$$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

   et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KP} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

   b. Si les points I, P et K étaient alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KP}$ seraient colinéaires donc, comme $\overrightarrow{KI} \neq \overrightarrow{0}$, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{KP} = k\overrightarrow{KI}$ c'est-à-dire, d'après la question précédente,

$$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} = -\frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AE}.$$

   Par unicité de l'écriture dans une base, on en déduit que $\frac{3}{4} = k$ et $\frac{1}{4} = \frac{k}{2}$ ce qui est contradictoire car $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KP}$ ne sont pas colinéaires et donc les points I, P et K ne sont pas alignés.

6. **a.** On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KQ} &= \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

b. On étudie l'existence de réel a et b tels que $\overrightarrow{KQ} = a\overrightarrow{KI} + b\overrightarrow{KP}$, c'est-à-dire, d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &= a\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)+b\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)\\ &= \left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{4}\right)\overrightarrow{AB}+\left(a+\frac{3b}{4}\right)\overrightarrow{AD}+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{4}\right)\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans une base, ceci équivaut à

$$\begin{cases}-\frac{a}{2}-\frac{b}{4}=\frac{1}{2}\\ a+\frac{3b}{4}=1\\ \frac{a}{2}+\frac{b}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1-\frac{3b}{4}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{3b}{4}\right)+\frac{b}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1-\frac{3b}{4}\\ \frac{1}{2}-\frac{3b}{8}+\frac{b}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1-\frac{3b}{4}\\ -\frac{b}{8}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-5\\ b=8\end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{KQ} = -5\overrightarrow{KI} + 8\overrightarrow{KP}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{KQ}$, $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KP}$ sont coplanaires. On conclut que les points K, I, P et Q sont coplanaires.

Exercice 3.

1. **a.** Par définition, $u_1 = 4 - \frac{5}{u_0+2} = 4 - \frac{5}{10} = \frac{7}{2}$ et $u_2 = 4 - \frac{5}{\frac{7}{2}+2} = 4 - \frac{10}{11} = \frac{34}{11}$.

b. Comme $u_1 - u_0 = -\frac{9}{2} \neq -\frac{9}{22} = u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique. De même, comme $\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{16} \neq \frac{68}{77} = \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

c. La fonction suivante convient :

```
def terme(n):
    u=8
    for i in range(n):
        u=4-5/(u+2)
    return(u)
```

2. Voir l'annexe.

3. On peut conjecturer que

a. (u_n) est décroissante ;

b. (u_n) est bornée par 3 et 8.

4. **a.** La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = 0 - 5 \times \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

donc f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$ ».

Comme $u_0 = 8$ et $u_1 = \frac{7}{2}$, on a bien $3 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 8$ donc P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $3 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$ donc, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(3) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(8)$ c'est-à-dire $f(3) \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant f(8)$. Or, $f(3) = 3$ et $f(8) = \frac{7}{2} \leqslant 8$ donc $3 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$ et ainsi P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

c. On a donc montré que la suite (u_n) est décroissante et bornée par 3 et 8.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{4 - \frac{5}{u_n+2} - 3}{4 - \frac{5}{u_n+2} + 1} = \frac{1 - \frac{5}{u_n+2}}{5 - \frac{5}{u_n+2}} = \frac{u_n + 2 - 5}{5(u_n + 2) - 5} = \frac{u_n - 3}{5(u_n + 1)} = \frac{1}{5}a_n$$

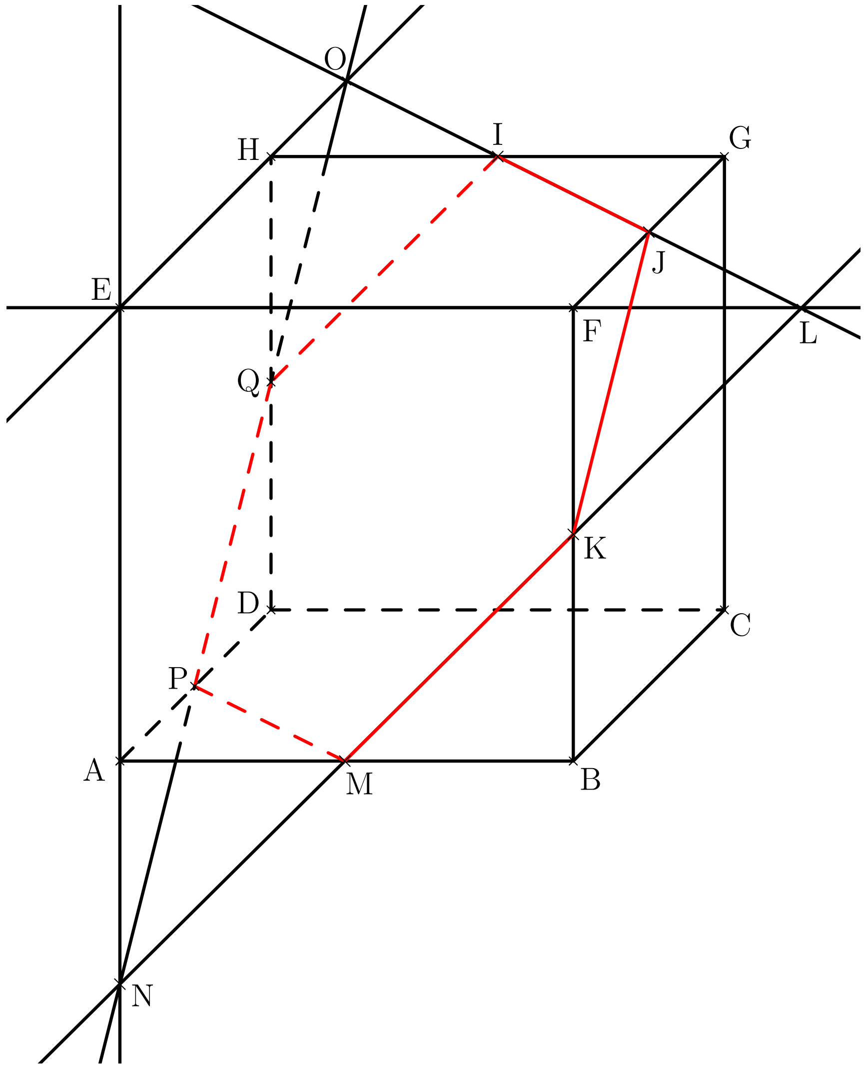
donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Or, $a_0 = \frac{u_0-3}{u_0+1} = \frac{8-3}{8+1} = \frac{5}{9}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5}{9} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{9} \times \frac{1}{5^n}$ c'est-à-dire $a_n = \frac{1}{9\times 5^{n-1}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$ donc $a_n(u_n + 1) = u_n - 3$ donc $a_n u_n - u_n = -a_n - 3$ c'est-à-dire $u_n(a_n - 1) = -(a_n + 3)$. Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ car $-3 \neq 1$ donc $a_n - 3 \neq a_n + 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{-(a_n+3)}{a_n-1} = \frac{3+a_n}{1-a_n}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3 + \frac{1}{9\times 5^{n-1}}}{1 - \frac{1}{9\times 5^{n-1}}} = \frac{3 \times 9 \times 5^{n-1} + 1}{1 \times 9 \times 5^{n-1} - 1} = \frac{27 \times 5^{n-1} + 1}{9 \times 5^{n-1} - 1}.$$

Exercice 2



Exercice 3