TMATHS2 **jeudi 13 octobre 2021**

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (6,5 points)**.** On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 16$, $b_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2b_n}{5} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1.

2. On considère la suite (d_n) définie, pour tout entier naturel n, par $d_n = a_n - b_n$.

a. Démontrer que la suite (d_n) est géométrique de raison 0,1.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n en fonction de n.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n = 0{,}5d_n$.

b. En déduire que la suite (b_n) est croissante.

4. a. Justifier que (b_n) est minorée par 5.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 5$.

5. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier naturel n, par $c_n = 5a_n + 4b_n$.

a. Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = c_n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 100$.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{100 + 44 \times 0{,}1^n}{9} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{100 - 55 \times 0{,}1^n}{9}.$$

Exercice 2 (5 points)**.** On s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}75u_n\,(1 - 0{,}15u_n) \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, <u>en milliers</u>, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 0{,}75x(1 - 0{,}15x).$$

Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Interpréter, dans le cadre de l'exercice, les propriétés de la suite (u_n) démontrées à la question précédente.

4. On estime que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. On considère la fonction `menacee()` suivante écrite en langage Python.

```
def menacee():
  u=0.6
  n=0
  while ...:
     u=...
     n=...
  return 2020+n
```

Recopier et compléter le script de cette fonction de telle sorte que lorsqu'on appelle la fonction `menacee()`, elle renvoie la première année à laquelle la population sera menacée d'extinction.

Exercice 3 (8,5 points)**.** On considère un cube ABCDEFGH représenté sur la feuille annexe. Le point I est le centre de la face EFGH, J et K sont les milieux respectifs de [BI] et [AI] et L et M sont les points définis par $\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{ID}}$ et $\overrightarrow{\text{IM}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{IC}}$.

1. Répondre au Q.C.M. sur la feuille annexe.

2. Le but de cette question est d'étudier l'alignement des points J, L et H.

a. Montrer que $\overrightarrow{\text{FI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{FE}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{FG}}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{\text{BI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{BF}}$ puis que $\overrightarrow{\text{JH}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{BA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BF}}$.

c. En raisonnant comme précédemment, on peut montrer que $\overrightarrow{\text{DI}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{BF}}$.
On admet ce résultat.
En déduire que $\overrightarrow{\text{LH}} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\text{BA}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\text{BC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BF}}$.

d. Les points J, L et H sont-ils alignés ?

3. **a.** Justifier que (LM) est parallèle à (DC) et en déduire que (LM) est parallèle à (KJ).
Les points K, J, L et M sont-ils coplanaires ?

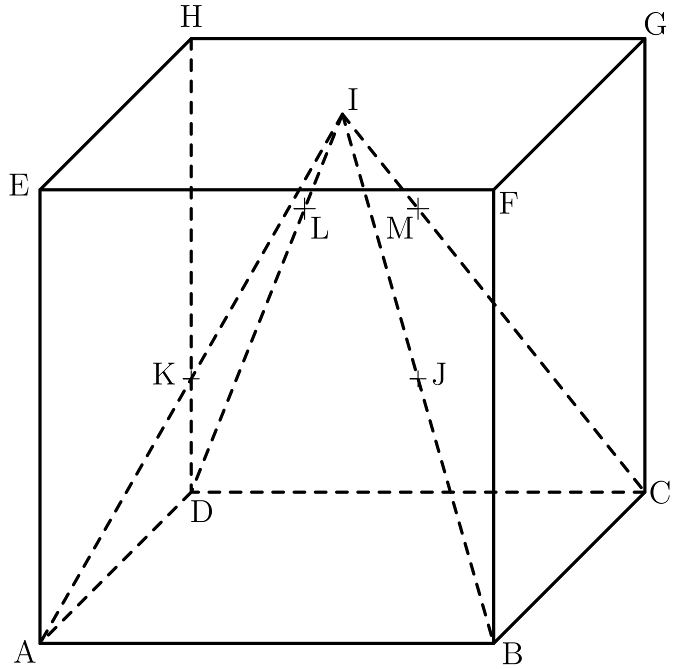
b. Justifier que les droites (MJ) et (BC) sont sécantes.

c. Montrer que les plans (JML) et (ABC) sont sécants selon une droite Δ parallèle à (AB).

d. Représenter Δ sur la figure de la feuille annexe.

Nom : .... **Prénom : ....**

Annexe



Pour chaque question, on demande de cocher la ou les affirmations qui sont vraies. Aucune justification n'est demandée.

1. Les droites (EH) et (BC) sont :

☐ sécantes ☐ parallèles ☐ coplanaires ☐ non coplanaires

2. Les droites (AC) et (FH) sont :

☐ sécantes ☐ parallèles ☐ coplanaires ☐ non coplanaires

3. Les droites (DH) et (AI) sont :

☐ sécantes ☐ parallèles ☐ coplanaires ☐ non coplanaires

4. L'intersection des plans (ABI) et (DIC) est :

☐ vide ☐ le point I ☐ une droite ☐ un plan

5. La droite (FH) est :

☐ sécante au plan (EAC) ☐ strictement parallèle au plan (EAC)
☐ incluse dans le plan (EAC)