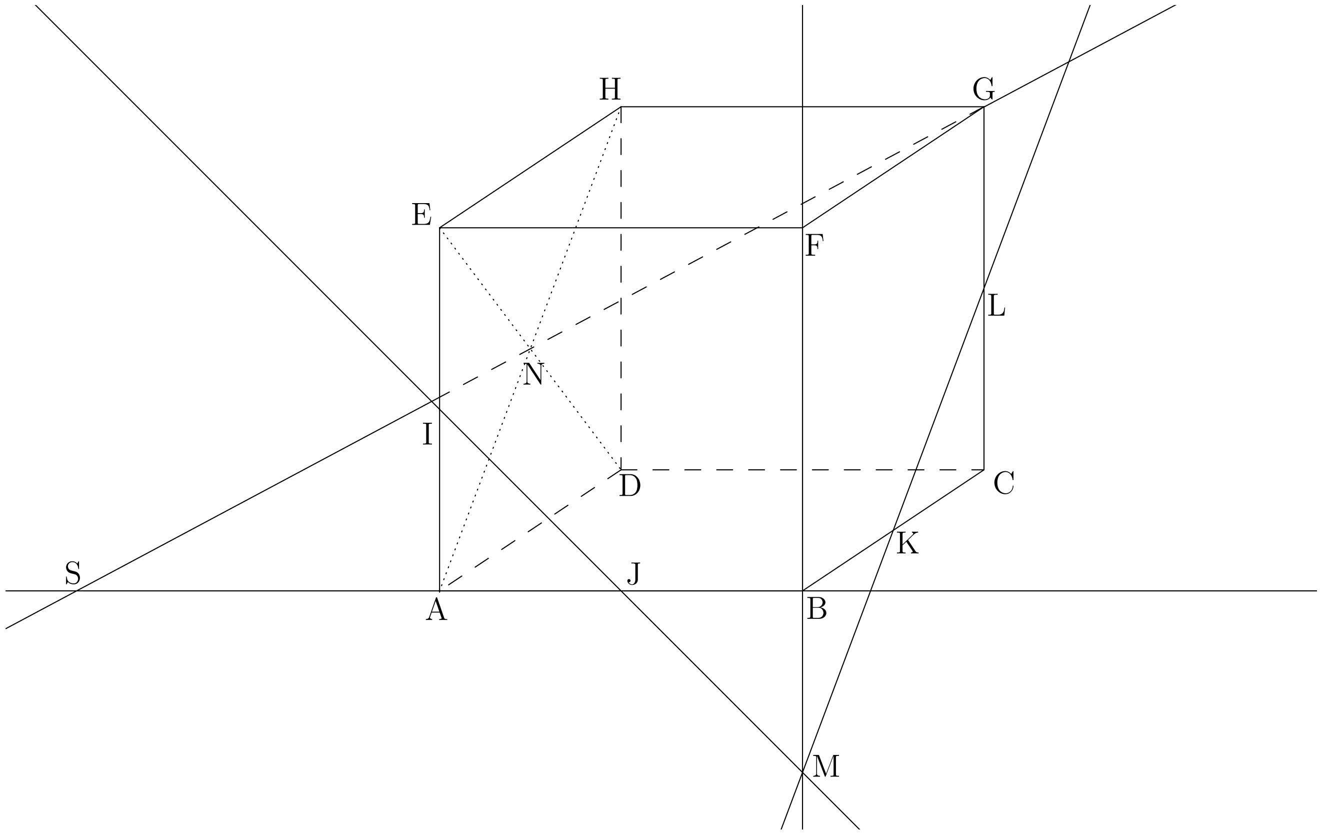
Corrigé du devoir à la maison n°3

1.



2. Dans le triangle ABC, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AB] et [BC] donc, par le théorème de la droite des milieux, (JK) ⫽ (AC).

De même, dans le triangle AEB, (IJ) ⫽ (EB). De plus, $\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ donc EHCB est un parallélogramme et ainsi (EB) ⫽ (HC). Il s'ensuit que (IJ) ⫽ (HC).

On a montré que deux droites sécantes du plan (IJK) sont respectivement sécantes à deux droite sécantes de (HAC) donc ces deux plans sont parallèles. De plus, H n'appartient pas au plan (AIJ) donc les plans (IJK) et (HAC) ne sont pas confondus.

On conclut donc que (IJK) et (HAC) sont strictement parallèles.

3. a. Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{JB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BK}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{BK}}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EA}}$$

et donc $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = 2\overrightarrow{\mathrm{JK}}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$ sont colinéaires donc les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

b. Comme les droites (IL) et (JK) sont parallèles, elles sont en particulier coplanaires et donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

c. Comme I, J, K et L sont coplanaires, les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires. De plus, si elles étaient parallèles alors, comme (IL) est parallèle à (JK), le quadrilatère IJKL serait un parallélogramme et donc $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$ serait égal à $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$, ce qui contredit le résutlat de la question **3.a.**. Ainsi, (IJ) et (KL) sont coplanaires et ne sont pas parallèles donc (IJ) et (KL) sont sécantes en un point M.

d. La droite (BF) est l'intersection des plans (ABF) et (CBF). Or, (IJ) est incluse dans (ABF) et (KL) est incluse dans (CBF) donc l'intersection de ces deux droites appartient à (ABF) $\cap$ (CBF) c'est-à-dire M $\in$ (BF).

Les droites (BF) et (CG) sont parallèles donc, par le théorème de Thalès, $\frac{BM}{CL} = \frac{KM}{KL} = \frac{KB}{KC} =$. Or, comme K est le milieu de [BC], KB = KC et KM = KL. Ainsi, K est le milieu de [BC] et de [ML] donc le quadrilatère BMCL est un parallélogramme. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{LC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

4. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{\mathrm{SG}} = \overrightarrow{\mathrm{SB}} + \overrightarrow{\mathrm{BG}}$. De plus, par définition, $\overrightarrow{\mathrm{SB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{SA}}$ et, comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{HG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{SG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{SA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}$. Enfin, comme N est le centre de AEHD, H est le milieu de [AH] donc $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ et ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{SG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{SA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AN}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{SA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}) = 2\overrightarrow{\mathrm{SN}}.$$

On a montré que $\overrightarrow{\mathrm{SG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SN}}$ sont colinéaires donc les points S, N et G sont alignés.

5. Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ dans la base $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ de l'espace :

- $\overrightarrow{\mathrm{SM}} = \overrightarrow{\mathrm{SB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- $\overrightarrow{\mathrm{SL}} = \overrightarrow{\mathrm{SB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- $\overrightarrow{\mathrm{SP}} = \overrightarrow{\mathrm{SA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

Dès lors,

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SM}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SL}} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right) + \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{SP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SM}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SL}}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ sont coplanaire donc les points S, P, M et L sont coplanaires.

6. Dire que Q appartient à (AG) revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ et donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{SA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\\ &= (1+k)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AD}} + k\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$

Ensuite, dire que S, Q, L et M sont coplanaires revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SM}}$ sont coplanaires c'est-à-dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\overrightarrow{\mathrm{SM}} + b\overrightarrow{\mathrm{SL}}$ soit encore

$$\begin{aligned}(1+k)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AD}} + k\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= a\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right) + b\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\\ &= (2a+2b)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{b-a}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}.\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ sont non coplanaires, ceci équivaut à $1+k = 2a+2b$, $k = b$ et $k = \frac{b-a}{2}$ c'est-à-dire $b = k$, $a = -k$ et $1 + k = -2k + 2k = 0$ donc $k = -1$. Ainsi, l'unique point Q de (AG) tel que S, L, M et Q sont coplanaires est le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ c'est-à-dire le symétrique de G par rapport à A.