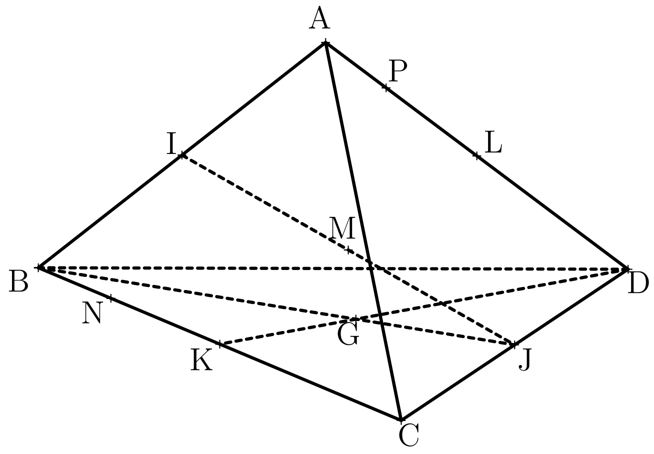
Corrigé du devoir à la maison n°3

Exercice 1



1. Comme I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [BC], d'après le théorème de la droite des milieux, (IK) est parallèle à (AC). De même, (JL) est parallèle à (AC) et donc (IK) est parallèle à (JL). Ainsi, les deux droites (IK) et (JL) sont coplanaires et donc I, J, K et L sont coplanaires.

2. Comme G est le centre de gravité de BCD, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ donc

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}.$$

Par ailleurs, comme M est le milieu de [IJ], $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}.\end{aligned}$$

Ainsi, on constate que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires et ainsi les points A, M et G sont alignés.

3. Considérons le plan $\mathcal{P}$ défini par les points I, N et K. Comme B et C appartiennent à (NK) alors B et C appartiennent à $\mathcal{P}$. Dès lors, I et B appartiennent à $\mathcal{P}$ donc (IB) est incluse dans $\mathcal{P}$ et, comme A appartient à (IB), A appartient à $\mathcal{P}$. On en déduit que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC). Si P appartenait à (ABC) alors (AP) serait incluse dans (ABC) donc D appartiendrait à (ABC) ce qui contredit la définition du tétraèdre.

Ainsi, P n'appartient par à $\mathcal{P}$ donc I, N, K et P ne sont pas coplanaires.

Exercice 2

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - (x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x^2-2x+1$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2}.$$

Comme $a = -1 < 0$, on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}\right]$.

b. On conclut que f est décroissante sur $\left]-\infty\,;-1-\sqrt{2}\right]$, croissante sur $\left[-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-1+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

2. Comme f est une fraction rationnelle, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

3. En remarquant que

$$\begin{aligned} f(-1-\sqrt{2}) &= \frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \frac{-4\sqrt{2}+4}{4^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{4-4\sqrt{2}}{16-8} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(-1+\sqrt{2}) &= \frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}+2+1} = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}+4}{4^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{4+4\sqrt{2}}{16-8} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On a abouti au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de f	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

4. D'après le tableau de variation de f, pour tout réel x, $f(x) \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ i.e. $\frac{x+1}{x^2+1} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ donc, en multipliant par $x^2+1>0$, on conclut que $x+1 \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$.

Exercice 3 (Facultatif)

1. Pour un réel x, $f(x)$ est bien défini si et seulement si $\rceil^{3x} - 1$. Or,

$$\mathrm{e}^{3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. Soit x un réel différent de 0. Alors, $\mathrm{e}^{3x} \neq 0$ donc

$$1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^0 + (\mathrm{e}^x)^1 + (\mathrm{e}^x)^2 = \frac{1-(\mathrm{e}^x)^3}{1-\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On en déduit que, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x)^2}.$$

Dès lors, comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$, par produit, somme et inverse

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$