

Devoir à la maison n°3

À rendre le lundi 15 novembre 2021

Exercice 1. — On considère un tétraèdre ABCD. On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [CD], [BC] et [AD].

1. Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
2. On note G le centre de gravité du triangle BCD et M le milieu de [IJ].
Les points A, M et G sont-ils alignés ?
3. On définit les points N et P par

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}.$$

Les points I, K, N et P sont-ils coplanaires ?

Exercice 2. — On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

1. **a.** Calculer, pour tout réel x , $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
b. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} . On donnera sa réponse à l'aide de phrases et sans faire de tableau de variation.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur \mathbb{R} .
4. En déduire que, pour tout réel x , $x+1 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$.

Exercice 3 (Facultatif). — On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^{3x} - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.