Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 7 octobre 2022

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2. Écrire en langage Python une fonction `terme` telle que, pour tout entier naturel n, `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.
On supposera qu'on dispose d'une fonction `exp` telle que `exp(x)` renvoie l'image de x par la fonction exponentielle.

3. On considère la fonction $f : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $[0\,;1]$.

a. Montrer que f est croissante sur $[0\,;1]$.

b. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

c. Quelles propriétés de la suite (u_n) a-t-on démontré à la question précédente ?

4. On considère la fonction $g : x \longmapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $[0\,;1]$.

a. Étudier les variations de g sur $[0\,;1]$

b. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{1}{1+x}$.

5. À l'aide des questions précédentes, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

6. (facultatif) On considère la suite (H_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_{2k} - H_k \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_{2^m} \geqslant \dfrac{m+2}{2}$.

c. Montrer que (H_n) n'est pas majorée.

d. Conclure que la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

n'est pas majorée.