Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 21 septembre 2022

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 2^{n+1}.$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

a. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de w_n puis celle de u_n en fonction de n.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

a. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = n2^{n+1} + 1.$$

c. En remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (u_{k+1} - u_k) - 2^{k+1}$, retrouver le résultat précédent par un calcul direct (sans raisonnement par récurrence).

Tout ce qui suit est facultatif.

Complément sur la récurrence. Lorsqu'on fait une démonstration par récurrence, il est parfois nécessaire au moment de l'hérédité de savoir, non pas que la propriété est vraie au rang n mais qu'elle est vraie pour un certain rang $m \leqslant n$ voire qu'elle est vraie pour plusieurs rangs inférieurs à n. On utilise dans ce cas ce qu'on appelle une récurrence forte, qui n'est en fait qu'un cas particulier de récurrence comme on va le voir sur l'exemple suivant.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. On va montrer par récurrence (forte) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$. Pour ce faire, au lieu de prendre comme proposition P_n : « $u_n = 2^{n-1}$ » comme dans une récurrence classique, on va considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$P_n : \text{« pour tout entier } m \text{ compris entre 1 et } n,\ u_m = 2^{m-1} \text{ ».}$$

Pour l'initialisation, il n'y a qu'un seul entier naturel m compris entre 1 et 1 donc il suffit de montrer que $u_1 = 2^1$. Or, $u_0 = 1$ donc, par définition, $u_1 = u_0 = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc P_1 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_k est vraie. Ainsi, pour tout entier naturel m compris entre 1 et k, $u_m = 2^{m-1}$. On veut montrer que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier m compris entre 1 et $k+1$, $u_m = 2^{m-1}$. Mais, par hypothèse de récurrence, cette égalité est vraie pour tout entier m compris entre 1 et k donc il suffit de la montrer pour $m = k+1$. Or, par définition, $u_{k+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_k$ et, par hypothèse de récurrence, pour tout entier m compris entre 1 et k, $u_m = 2^{m-1}$ donc

$$u_{k+1} = u_0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 1 + \frac{1-2^k}{1-2} = 1 + 2^k - 1 = 2^k$$

donc l'égalité est vraie au rang $k+1$. Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 2 (facultatif). On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer, pour tout n, l'expression de u_n en fonction de n.