⧫ Chapitre 6 : Comportement asymptotique d'une suite réelle

1 Définitions

1.1 Suites convergentes

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) **converge** (ou est convergente) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.

Théorème et définition 2

Si une suite réelle (u_n) converge vers un réel ℓ alors ce nombre est unique et est appelé la **limite** de (u_n). On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $\lim u_n = \ell$.

Remarque 3. En particulier, s'il existe une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$ et si f converge vers un réel ℓ en $+\infty$ alors (u_n) converge vers ℓ.

Exemple 4. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

1.2 Suites divergentes

Définition 5

On dit qu'une suite **diverge** (ou est divergente) si elle ne converge pas.

Exemple 6. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

Définition 7

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) tend (ou diverge) vers $+\infty$ si, pour tout réel A positif, l'intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang i.e. s'il existe un entier N (dépendant de A) tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{A}$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $\lim u_n = +\infty$.
- (u_n) tend (ou diverge) vers $-\infty$ si, pour tout réel B négatif, l'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{B}[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang i.e. s'il existe un entier N (dépendant de B) tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{B}$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $\lim u_n = -\infty$.

Remarque 8. En particulier, s'il existe une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$ et si f diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 9. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Remarque 10. Si f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$ et si f diverge sans avoir de limite en $+\infty$, on ne peut rien dire, en général, sur (u_n). Par exemple, on peut montrer que la fonction sin diverge sans avoir de limite en $+\infty$ et c'est aussi le cas de la suite $(\sin(n))$. En revanche, on peut montrer que la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ diverge sans avoir de limite en $+\infty$ alors que la suite $(\sin(2\pi n))$ est constante égale à 0 donc convergente.

Propriété 11

Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou infinie) ℓ. Alors, $\lim u_{n+1} = \ell$.

2 Théorèmes sur les limites

Les limites de références, les opérations sur les limites (y compris la composition avec une fonction) et les règles opératoires sont les mêmes que pour les fonctions.

Exemple 12. Dans chaque cas, déterminer la limite de (u_n).

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4n+3}{n^2+n+1}$ b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$ c) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sqrt{n-2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \sqrt{n}$ e) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^* = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ f) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3\mathrm{e}^n$

Théorème 13. (Image d'une suite convergente par une fonction continue)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que (u_n) est une suite telle que $u_n \in I$ pour tout n suffisamment grand et (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors, la suite $(f(u_n))$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

3 Limites et ordre

3.1 Comparaisons

Théorème 14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout n (à partir d'un certain rang), $u_n \leqslant v_n$. On suppose, de plus, que (u_n) converge vers ℓ et que (v_n) converge vers ℓ'. Alors, $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque 15. — Si on sait que $u_n < v_n$ pour tout n (à partir d'un certain rang), on NE PEUT PAS en déduire que $\ell < \ell'$ mais seulement que $\ell \leqslant \ell'$. Penser par exemple à $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

Théorème 16. (Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »)

Soit (u_n), (d_n) et (g_n) trois suites réelles. On suppose que :

— pour tout entier n (à partir d'un certain rang), $g_n \leqslant u_n \leqslant d_n$;

— les suites (g_n) et (d_n) **convergent vers <u>la même limite</u>** i.e. qu'il existe **un réel** ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \ell$.

Alors, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple 17. — Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n+\cos(n)}{2n+(-1)^n}$. Étudier la limite de la suite (u_n).

Théorème 18. (Théorèmes de comparaison)

Soit (u_n) et (a_n) deux suites réelles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. Si, pour tout $n \geqslant N$, $a_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. Si, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant a_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple 19. Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin n$ et $v_n = (-1)^n - n$.

Propriété 20

Soit q un réel.

— Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) diverge.
— Si $|q| < 1$ (i.e. si $-1 < q < 1$) alors (q^n) converge vers 0.
— Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
— Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemple 21. Étudier les comportements asymptotiques des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, $v_n = 3^n + 0{,}5^n$ et $w_n = 3^n - 2^n$.

3.2 Théorème des suites monotones

Théorème 22

1. Une suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Une suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 23. (Admis)

1. Une suite réelle croissante et majorée par un réel M converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
2. Une suite réelle décroissante et minorée par un réel m converge vers un réel $\ell \geqslant m$.

Remarque 24. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que, dans ce théorème, $\ell = M$ ou $\ell = m$ et ce pour la bonne et simple raison que si (u_n) est majorée par M (resp. minorée par m), elle l'est aussi par tout réel $M' \geqslant M$ (resp. par tout réel $m' \leqslant m$).

Exemple 25. Soit $a \in \,]0\,;1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$. On a vu dans le chapitre 1 que (u_n) est décroissante (exercice 2 de la fiche « Étude des variations d'une suite ») et dans le chapitre 0 que (u_n) minorée par 0 (exercice 7). Ainsi, par le théorème des suites monotones, (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 26. Étudier les variations et le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}$.

Exercice 27. Même question avec la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n}$.