

Révisions de probabilités

Question 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
Que veut $\mathbf{E}(X)$?

30 s

Question 2. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(B | A) = \frac{3}{4}$.
Calculer $\mathbf{P}(\overline{B} | A)$.

30 s

Question 3. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(B | A) = \frac{1}{2}$.
Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

1 min

Question 4. Je suis une loi usuelle dont l'univers image est $\llbracket 1, n \rrbracket$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).
Qui suis-je ?

30 s

Question 5. VRAI ou FAUX ?

Si A et B sont deux évènements indépendants alors \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

30 s

Question 6. Énoncer la formule des probabilités totales.

1 min

Question 7. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers et admettant des espérances. Alors, $X + Y$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

30 s

Question 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Compléter :

- $X(\Omega) = \dots$
- pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = k) = \dots$

1 min

Question 9. Soit X une variable aléatoire à densité et a un réel.

Déterminer $\mathbf{P}(X = a)$.

30 s

Question 10. On tire successivement et avec remise 4 boules dans un urne contenant 2 boules rouges et 1 boule noire.

Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge.

1 min 30

Question 11. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. Si X et Y admettent des variances alors $X + Y$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

30 s

Question 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.
Calculer $\mathbf{E}(6X + 1)$ et $\mathbf{V}(6X + 1)$.

2 min

Question 13. Soit X une variable aléatoire.
Rappeler la définition de la fonction de répartition de X .

30 s

Question 14. VRAI ou FAUX ?

Pour toute variable aléatoire X et tout réel a ,

$$\mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a).$$

30 s

Question 15. On tire successivement et avec remise des boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules noires. On appelle X le rang d'apparition de la première boule rouge.
Quelle est la loi de X et quelle est son espérance ?

1 min

Question 16. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(1, 4)$. On pose $Y = \frac{X - 1}{2}$.
Déterminer la loi de Y .

1 min

Question 17. Rappeler la formule de König-Huygens pour la covariance.

1 min

Question 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance.

1 min

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}$. Alors, $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \frac{4}{5}$.

1 min

Question 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Donner la loi de $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

30 s

Question 21. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires.

Déterminer la probabilité que les 3 boules tirées soient rouges.

1 min 30

Question 22. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Calculer $\mathbf{P}(X \leq 2)$.

1 min 30

Question 23. Le temps d'attente (en minutes) à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0 ; 20]$.
Déterminer le temps d'attente moyen à ce guichet.

30 s

Question 24. VRAI ou FAUX ?

Si deux variables aléatoires X et Y sont non corrélées alors elles sont indépendantes.

30 s

Question 25. Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{9}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{9}$.
Calculer $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.

2 min

Question 26. VRAI ou FAUX ?

Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X . Alors, X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ converge.

30 s

Question 27. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

2 min

Question 28. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Soit a un réel tel que $\mathbf{P}(X \geq a) = 0,1$.
Calculer la probabilité que $\mathbf{P}(X > -a)$.

2 min

Question 29. VRAI ou FAUX ?

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre 1 alors :

$$\mathbf{P}(|X - 1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

1 min

Question 30. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{3e^j!}.$$

Déterminer la loi de X .

2 min

Solutions

Question 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
Que veut $\mathbf{E}(X)$?

Question 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
Que veut $\mathbf{E}(X)$?

Solution. Par propriété, $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{3}$.

Question 2. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{3}{4}$.
Calculer $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A)$.

Question 2. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(B | A) = \frac{3}{4}$.
Calculer $\mathbf{P}(\overline{B} | A)$.

Solution. Par propriété,

$$\mathbf{P}(\overline{B} | A) = 1 - \mathbf{P}(B | A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Question 3. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$.
Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Question 3. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$.
Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Solution. Par propriété,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Question 4. Je suis une loi usuelle dont l'univers image est $\llbracket 1, n \rrbracket$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).
Qui suis-je ?

Question 4. Je suis une loi usuelle dont l'univers image est $\llbracket 1, n \rrbracket$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).
Qui suis-je ?

Solution. La seule loi usuelle dont l'univers image est $\llbracket 1, n \rrbracket$ est la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Question 5. VRAI ou FAUX ?

Si A et B sont deux évènements indépendants alors \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

Question 5. VRAI ou FAUX ?

Si A et B sont deux évènements indépendants alors \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

Solution. VRAI.

En effet, si A et B sont indépendants alors, par propriété, \overline{A} et B le sont aussi et donc \overline{A} et \overline{B} également.

Question 6. Énoncer la formule des probabilités totales.

Question 6. Énoncer la formule des probabilités totales.

Solution. Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un système complet d'évènements et B un évènement. Alors,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B \cap A_i).$$

Si, de plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$ alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(B \mid A_i).$$

Question 7. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers et admettant des espérances. Alors, $X + Y$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Question 7. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers et admettant des espérances. Alors, $X + Y$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Solution. VRAI par linéarité de l'espérance.

Question 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Compléter :

- $X(\Omega) = \dots$
- pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = k) = \dots$

Question 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Compléter :

- $X(\Omega) = \dots$
- pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = k) = \dots$

Solution.

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$\mathbf{P}(X = k) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

Question 9. Soit X une variable aléatoire à densité et a un réel.
Déterminer $\mathbf{P}(X = a)$.

Question 9. Soit X une variable aléatoire à densité et a un réel.

Déterminer $\mathbf{P}(X = a)$.

Solution. Comme X est une variable aléatoire à densité, $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Question 10. On tire successivement et avec remise 4 boules dans un urne contenant 2 boules rouges et 1 boule noire.
Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge.

Question 10. On tire successivement et avec remise 4 boules dans un urne contenant 2 boules rouges et 1 boule noire.

Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge.

Solution. Par indépendance des tirages (puisqu'il y a remise), la probabilité de ne tirer que des boules noires est $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ donc la probabilité de tirer au moins une boule rouge est $1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$.

Question 11. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. Si X et Y admettent des variances alors $X + Y$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Question 11. VRAI ou FAUX ?

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. Si X et Y admettent des variances alors $X + Y$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Solution. FAUX. En effet, en toute généralité,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y).$$

Ainsi, si X et Y sont corrélées (c'est-à-dire si $\mathbf{Cov}(X, Y) \neq 0$) alors $\mathbf{V}(X + Y) \neq \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Question 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.
Calculer $\mathbf{E}(6X + 1)$ et $\mathbf{V}(6X + 1)$.

Question 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.
Calculer $\mathbf{E}(6X + 1)$ et $\mathbf{V}(6X + 1)$.

Solution. Par propriété, $\mathbf{E}(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ et $\mathbf{V}(X) = 10 \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{20}{9}$. Ainsi, par propriété,

$$\mathbf{E}(6X + 1) = 6\mathbf{E}(X) + 1 = 21$$

et

$$\mathbf{V}(6X + 1) = 36\mathbf{V}(X) = 80.$$

Question 13. Soit X une variable aléatoire.
Rappeler la définition de la fonction de répartition de X .

Question 13. Soit X une variable aléatoire.
Rappeler la définition de la fonction de répartition de X .

Solution. La fonction de répartition de X est définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Question 14. VRAI ou FAUX ?

Pour toute variable aléatoire X et tout réel a ,
 $\mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a)$.

Question 14. VRAI ou FAUX ?

Pour toute variable aléatoire X et tout réel a ,
 $\mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}(X < a)$.

Solution. FAUX.

Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ alors $\mathbf{P}(X \leq 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ mais $\mathbf{P}(X < 0) = 0$.

Remarque. Le résultat est en revanche vrai pour les variables aléatoires à densité.

Question 15. On tire successivement et avec remise des boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules noires. On appelle X le rang d'apparition de la première boule rouge.
Quelle est la loi de X et quelle est son espérance ?

Question 15. On tire successivement et avec remise des boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules noires. On appelle X le rang d'apparition de la première boule rouge. Quelle est la loi de X et quelle est son espérance ?

Solution. La variable aléatoire X correspond au rang d'apparition du premier succès dans un schéma de Bernoulli (car il y a remise) en prenant comme succès « Obtenir une boule rouge ». Par propriété, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{5}{8}\right)$ et $\mathbf{E}(X) = \frac{8}{5}$.

Question 16. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(1, 4)$. On pose $Y = \frac{X - 1}{2}$.
Déterminer la loi de Y .

Question 16. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(1, 4)$. On pose $Y = \frac{X - 1}{2}$. Déterminer la loi de Y .

Solution. Par propriété, Y suit une loi normale centrée réduite puisque l'espérance de X est $\mu = 1$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

Question 17. Rappeler la formule de König-Huygens pour la covariance.

Question 17. Rappeler la formule de König-Huygens pour la covariance.

Solution. Soit X et Y des variables aléatoires admettant des espérances. Alors, (X, Y) admet une covariance si et seulement si XY admet une espérance et, dans ce cas,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Question 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance.

Question 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance.

Solution. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\mathbf{P}(X = k)$ converge.

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}$. Alors, $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \frac{4}{5}$.

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}$. Alors, $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \frac{4}{5}$.

Solution. VRAI.

En effet,

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

et $\mathbf{P}(A \cap B) \geq 0$ donc

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Question 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Donner la loi de $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

Question 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Donner la loi de $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

Solution. Par propriété, S suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

Question 21. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires.
Déterminer la probabilité que les 3 boules tirées soient rouges.

Question 21. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires.

Déterminer la probabilité que les 3 boules tirées soient rouges.

Solution. Par la formule des probabilités composées, la probabilité de tirer 3 boules rouges est

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$$

Question 22. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Calculer $\mathbf{P}(X \leq 2)$.

Question 22. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Calculer $\mathbf{P}(X \leq 2)$.

Solution. Par définition,

$$\mathbf{P}(X \leq 2) = \int_0^2 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^2 = -e^{-2} - (-e^0)$$

donc $\mathbf{P}(X \leq 2) = 1 - e^{-2}$.

Question 23. Le temps d'attente (en minutes) à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0 ; 20]$.
Déterminer le temps d'attente moyen à ce guichet.

Question 23. Le temps d'attente (en minutes) à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0 ; 20]$.
Déterminer le temps d'attente moyen à ce guichet.

Solution. Comme $\mathbf{E}(X) = \frac{0+20}{2} = 10$, le temps d'attente moyen à ce guichet est de 10 minutes.

Question 24. VRAI ou FAUX ?

Si deux variables aléatoires X et Y sont non corrélées alors elles sont indépendantes.

Question 24. VRAI ou FAUX ?

Si deux variables aléatoires X et Y sont non corrélées alors elles sont indépendantes.

Solution. FAUX.

En effet, deux variables indépendantes ne sont pas corrélées mais deux variables non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.

Question 25. Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{9}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{9}$.
Calculer $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.

Question 25. Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{9}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{9}$.
Calculer $\mathbf{P}(\bar{A} \cap B)$.

Solution. Comme A et \bar{A} forment un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cap B)$$

donc

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Question 26. VRAI ou FAUX ?

Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X . Alors, X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ converge.

Question 26. VRAI ou FAUX ?

Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X . Alors, X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ converge.

Solution. FAUX.

Une variable aléatoire X de densité f admet une espérance si, et seulement si, $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx$ converge.

Question 27. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

Question 27. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

Solution. Par définition, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0; 1\}$ et, pour tout $i \in \{0; 1\}$, $\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(Y = i) = \frac{1}{2}$ donc, par indépendance, pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$,

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Question 28. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Soit a un réel tel que $\mathbf{P}(X \geq a) = 0,1$.

Calculer la probabilité que $\mathbf{P}(X > -a)$.

Question 28. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Soit a un réel tel que $\mathbf{P}(X \geq a) = 0,1$.

Calculer la probabilité que $\mathbf{P}(X > -a)$.

Solution. Par symétrie de la densité,

$$\mathbf{P}(X \leq -a) = \mathbf{P}(X \geq a) = 0,1$$

donc

$$\mathbf{P}(X > -a) = 1 - \mathbf{P}(X \leq -a) = 0,9$$

Question 29. VRAI ou FAUX ?

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre 1 alors :

$$\mathbf{P}(|X - 1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

Question 29. VRAI ou FAUX ?

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre 1 alors :

$$\mathbf{P}(|X - 1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

Solution. VRAI.

Par propriété, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = 1$, et, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq 2) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{2^2}$$

donc

$$\mathbf{P}(|X - 1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

Question 30. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{3e^{j!}}.$$

Déterminer la loi de X .

Question 30. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{3e j!}.$$

Déterminer la loi de X .

Solution. Comme $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3e j!} = \frac{1}{3e} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{3e} \times e^1 = \frac{1}{3}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.