

Révisions d'analyse

Question 1. VRAI ou FAUX ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$u_0 = 2, u_1 = 7 \text{ et } u_2 = 10.$$

Alors, (u_n) est nécessairement croissante.

30 s

Question 2. VRAI ou FAUX ?

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{n-1}{n^2}$$

Alors, (u_n) converge et sa limite est égale à 1.

1 min

Question 3. VRAI ou FAUX ?

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = 0$.

Alors f admet un extremum en 0.

30 s

Question 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

30 s

Question 5. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} ?$$

30s

Question 6. Donner une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}$.

1 min

Question 7. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

1 min

Question 8. Déterminer les dérivées partielles de f sur \mathbb{R}^2 avec :

$$f : (x, y) \longmapsto xe^{x+y}$$

1 min

Question 9. Donner le développement limité de $x \mapsto e^x - \cos(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

2 min

Question 10. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

1 min

Question 11. VRAI OU FAUX ?

On a l'équivalent suivant :

$$x^3 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

1 min

Question 12. VRAI OU FAUX ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

30 s

Question 13. VRAI OU FAUX ?

Soit $P : x \longmapsto x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 3$. Alors P admet au moins une racine réelle.

1 min 30

Question 14. VRAI OU FAUX ?

Une fonction dérivable en 1 est nécessairement continue en 1.

30 s

Question 15. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

1 min

Question 16. VRAI ou FAUX ?

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous éléments a et b de I tels que $a \leq b$, et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

1 min

Question 17. Soit $f : x \mapsto e^x$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

1 min

Question 18. Justifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{k}$ diverge.

1 min

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Si $0 \leq q \leq 1$ alors la série $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge

1 min

Question 20. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0$$

1 min

Question 21. Calculer $\int_0^1 \sqrt{t} dt$.

1 min

Question 22. Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

1 min

Question 23. Rappeler la nature et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

30s

Question 24. Justifier que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ converge, via un théorème de comparaison.

1 min

Question 25. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Que signifie « f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} » ?

1 min

Question 26. VRAI ou FAUX ?

On a :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

30 s

Question 27. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x$.
Donner l'ensemble des points critiques de f .

2 min

Question 28. VRAI ou FAUX ?

Soit u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. La fonction u est une solution particulière de

$$y' - 2y = x^2.$$

2 min

Question 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,5u_n + 100$$

Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 200$ est géométrique.

2 min

Question 30.

Déterminer la limite de (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n^{2026}}{e^n}$.

30 s

Solutions

Question 1. VRAI ou FAUX ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$u_0 = 2, u_1 = 7 \text{ et } u_2 = 10.$$

Alors, (u_n) est nécessairement croissante.

Question 1. VRAI ou FAUX ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$u_0 = 2, u_1 = 7 \text{ et } u_2 = 10.$$

Alors, (u_n) est nécessairement croissante.

Solution. FAUX.

On pourrait imaginer que u_3 soit strictement plus petit que u_2 par exemple. La seule connaissance de 3 termes de la suite ne nous permet pas de conclure sur le sens de variation de (u_n) . On peut juste dire que (u_n) ne peut pas être décroissante.

Question 2. VRAI ou FAUX ?

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{n-1}{n^2}$$

Alors, (u_n) converge et sa limite est égale à 1.

Question 2. VRAI ou FAUX ?

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{n-1}{n^2}$$

Alors, (u_n) converge et sa limite est égale à 1.

Solution. VRAI.

En effet,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$
- $1 + \frac{n-1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

donc, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et sa limite est égale à 1.

Question 3. VRAI ou FAUX ?

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = 0$.

Alors f admet un extremum en 0.

Question 3. VRAI ou FAUX ?

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = 0$.

Alors f admet un extremum en 0.

Solution. FAUX.

Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ est dérivable et $f'(0) = 0$ mais, pour autant, la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et n'admet donc pas d'extremum.

Question 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

Question 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

Solution. Par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

Question 5. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} ?$$

Question 5. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$?

Solution. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

Question 6. Donner une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}$.

Question 6. Donner une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}$.

Solution. La fonction $t \mapsto \ln(t^2 + 1)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}$ sur \mathbb{R} .

Question 7. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

Question 7. Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

Solution. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série exponentielle de la forme $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ avec $x = 1$. Cette série converge donc et sa somme vaut e . Cependant, la série proposée dans la question commence au terme $n = 1$. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ converge et sa somme est $e - 1$.

Question 8. Déterminer les dérivées partielles de f sur \mathbb{R}^2 avec :

$$f : (x, y) \longmapsto xe^{x+y}$$

Question 8. Déterminer les dérivées partielles de f sur \mathbb{R}^2 avec :

$$f : (x, y) \longmapsto xe^{x+y}$$

Solution. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xe^{x+y} + e^{x+y} = (x + 1)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{x+y}$$

Question 9. Donner le développement limité de $x \mapsto e^x - \cos(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

Question 9. Donner le développement limité de $x \mapsto e^x - \cos(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

Solution. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

donc

$$e^x - \cos(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Question 10. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Question 10. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Solution. Comme $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Question 11. VRAI OU FAUX ?

On a l'équivalent suivant :

$$x^3 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Question 11. VRAI OU FAUX ?

On a l'équivalent suivant :

$$x^3 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Solution. VRAI.

Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{x^3 + x}{x} = x^2 + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Question 12. VRAI OU FAUX ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

Question 12. VRAI OU FAUX ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

Solution. FAUX.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Question 13. VRAI OU FAUX ?

Soit $P : x \mapsto x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 3$. Alors P admet au moins une racine réelle.

Question 13. VRAI OU FAUX ?

Soit $P : x \mapsto x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 3$. Alors P admet au moins une racine réelle.

Solution. VRAI.

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$.

De plus, P est continue sur \mathbb{R} donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution. Autrement dit, P admet au moins une racine réelle.

Question 14. VRAI OU FAUX ?

Une fonction dérivable en 1 est nécessairement continue en 1.

Question 14. VRAI OU FAUX ?

Une fonction dérivable en 1 est nécessairement continue en 1.

Solution. VRAI.

C'est une propriété du cours. La réciproque n'est en revanche pas vraie.

Question 15. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Question 15. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Solution. Soit u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Alors, pour tous réels a et b appartenant à I ,

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Question 16. VRAI ou FAUX ?

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous éléments a et b de I tels que $a \leq b$, et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Question 16. VRAI ou FAUX ?

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous éléments a et b de I tels que $a \leq b$, et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Solution. FAUX.

Le théorème des valeurs intermédiaires ne garantit pas l'unicité de c . Par exemple, la fonction cosinus vérifie les hypothèses du théorème sur $[0; 3\pi]$ et pour $k = 0$ compris entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(3\pi) = -1$, il existe plusieurs c tels que $\cos(c) = 0$. Par exemple, $\cos(\frac{\pi}{2})$ et $\cos(\frac{3\pi}{2})$.

Question 17. Soit $f : x \mapsto e^x$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Question 17. Soit $f : x \mapsto e^x$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Solution. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 admet pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

On trouve finalement comme équation :

$$y = x + 1$$

Question 18. Justifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{k}$ diverge.

Question 18. Justifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{k}$ diverge.

Solution. Pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{2}{k} > \frac{1}{k} > 0$$

Par le théorème de comparaison, $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{k}$ diverge.

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Si $0 \leq q \leq 1$, la série $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge

Question 19. VRAI ou FAUX ?

Si $0 \leq q \leq 1$, la série $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge

Solution. FAUX

Si $q = 1$, cette série diverge.

Question 20. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Question 20. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Solution. On commence par résoudre l'équation caractéristique associée. On reconnaît une identité remarquable :

$$(x - 1)^2 = 0.$$

On a ainsi une racine réelle double 1. On en déduit l'ensemble des solutions de cette équation différentielle :

$$\{t \mapsto (At + B)e^t \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Question 21. Calculer $\int_0^1 \sqrt{t} dt$.

Question 21. Calculer $\int_0^1 \sqrt{t} dt$.

Solution. On peut écrire, pour tout réel $t \in [0; 1]$, $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0; 1]$ est $t \mapsto \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$ donc

$$\int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Question 22. Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Question 22. Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Solution. Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^A \\ &= 1 - \frac{1}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Question 23. Rappeler la nature et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Question 23. Rappeler la nature et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Solution. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Question 24.

Justifier que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ converge.

Question 24.

Justifier que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ converge.

Solution. Comme

$$\frac{1}{1+x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ converge ($3 > 1$), d'après les théorèmes de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ converge.

Question 25. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Que signifie « f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} » ?

Question 25. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Que signifie « f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} » ?

Solution. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} si

- f est dérivable sur \mathbb{R} ;
- f' est continue sur \mathbb{R} .

Question 26. VRAI ou FAUX ?

On a :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Question 26. VRAI ou FAUX ?

On a :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Solution. VRAI.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Comme $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a bien $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Question 27. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x$.
Donner l'ensemble des points critiques de f .

Question 27. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x$.
Donner l'ensemble des points critiques de f .

Solution. Les applications partielles de f sont dérivables sur \mathbb{R} et, pour tous réels x et y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Ainsi, l'ensemble des points critiques est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique est donc le point $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Question 28. VRAI ou FAUX ?

Soit u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.
 u est une solution particulière de $y' - 2y = x^2$.

Question 28. VRAI ou FAUX ?

Soit u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.
 u est une solution particulière de $y' - 2y = x^2$.

Solution. La fonction u est un polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$u'(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

On en déduit que, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}u'(x) - 2u(x) &= -x - \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \\ &= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} \\ &= x^2\end{aligned}$$

Ainsi, u est une solution de $y' - 2y = x^2$.

Question 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,5u_n + 100$$

Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 200$ est géométrique.

Question 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,5u_n + 100$$

Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 200$ est géométrique.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 \\ &= 0,5u_n + 100 - 200 \\ &= 0,5u_n - 100 \\ &= 0,5(u_n - 200) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,5.

Question 30.

Déterminer la limite de (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$

par $u_n = \frac{n^{2026}}{e^n}$.

Question 30.

Déterminer la limite de (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$

par $u_n = \frac{n^{2026}}{e^n}$.

Solution. Par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2026}}{e^n} = 0.$$