Révisions d'algèbre

Question 1. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2,
$AB = BA$.

30 s

Question 2. L'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

1 min

Question 3. Quel est le spectre de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

30 s

Question 4. Quel est le rang de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

30 s

Question 5. Le nombre 1 est-il racine du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 2$?

1 min

Question 6. Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée à coefficients réels ou complexes soit diagonalisable.

1 min

Question 7. Déterminer la norme du vecteur $u = (3, 4, -5)$ de $\mathbb{R}^3$.

1 min

Question 8. Déterminer la matrice M dans la base canonique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

1 min

Question 9. Soit $P = X^2$ et $Q = X + 1$.
Déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1 min

Question 10. Les vecteurs $u = (1, 1, -2)$ et $v = (2, 0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

1 min

Question 11. VRAI ou FAUX ?
Soit $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$. La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

1 min

Question 12. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

30 s

Question 13. Soit f et g deux automorphismes d'un espace vectoriel E. La composée $f \circ g$ est-elle un automorphisme de E ? Si oui, quel est son automorphisme réciproque ?

1 min

Question 14. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si $A^2 = 0_2$ alors $A = 0_2$.

1 min 30 s

Question 15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $E_1(f) = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $E_3(f) = \text{Vect}((-1,2,1))$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1 min

Question 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer $f(1, 0, 1)$.

1 min

Question 17. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, -1\}$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

1 min

Question 18. Classer les espaces vectoriels suivants dans l'ordre croissant de leurs dimensions.

$$E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \qquad F = \mathbb{R}_9[X] \qquad G = \mathbb{R}^8.$$

1 min

Question 19. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $A^3 = 0_3$ alors, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = 0_3$.

1 min

Question 20. La famille $((1,1,0),(1,-1,0))$ est-elle une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$?

30 s

Question 21. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont le noyau est $\text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,0))$.
Déterminer le rang de f.

1 min

Question 22. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $\deg(P) = 3$ et $\deg(Q) = 2$. Déterminer $\deg(PQ)$ et $\deg(P \circ Q)$.

1 min

Question 23. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. L'application f peut-elle être bijective ?

1 min

Question 24. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$^t(AB) = {}^tA\ {}^tB.$$

30 s

Question 25. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.
Quelle est la dimension de $F = \text{Vect}(u, v, w)$?

2 min

Question 26. VRAI ou FAUX ?

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

30 s

Question 27. Soit $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $v = (1, 1, 1)$.
Déterminer le projeté orthogonal de v sur F.

2 min

Question 28. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

2 min

Question 29. VRAI ou FAUX ?
Pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$.

1 min

Question 30. Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

1 min

Solutions

Question 1. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2,
$AB = BA$?

Question 1. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $AB = BA$?

Solution. FAUX.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $AB = B$ et $BA = 0_2$ donc $AB \neq BA$.

Question 2. L'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Question 2. L'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Solution. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $(0, 0)$) n'appartient pas à F car $0 + 0 \neq 1$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Question 3. Quel est le spectre de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Question 3. Quel est le spectre de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solution. Comme M est triangulaire, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2, -3\}$.

Question 4. Quel est le rang de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 4. Quel est le rang de la matrice M suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution. Le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Or, ici les trois colonnes sont identiques donc

$$\mathrm{rg}(M) = \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right) = 1 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 5. Le nombre 1 est-il racine du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 2$?

Question 5. Le nombre 1 est-il racine du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 2$?

Solution. $P(1) = 1 - 6 + 3 + 2 = 0$ donc 1 est une racine de P.

Question 6. Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée à coefficients réels ou complexes soit diagonalisable.

Question 6. Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée à coefficients réels ou complexes soit diagonalisable.

Solution. Si une matrice carrée M d'ordre n à coefficients réels ou complexes admet n valeurs propres distinctes alors M est diagonalisable.

Question 7. Déterminer la norme du vecteur $u = (3, 4, -5)$ de $\mathbb{R}^3$.

Question 7. Déterminer la norme du vecteur $u = (3, 4, -5)$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution.
$\|u\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25}$ donc
$\|u\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Question 8. Déterminer la matrice M dans la base canonique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Question 8. Déterminer la matrice M dans la base canonique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Solution. $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 9. Soit $P = X^2$ et $Q = X + 1$.
Déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Question 9. Soit $P = X^2$ et $Q = X + 1$.
Déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Solution. $P \circ Q = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$ et
$Q \circ P = X^2 + 1$.

Question 10. Les vecteurs $u = (1, 1, -2)$ et $v = (2, 0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Question 10. Les vecteurs $u = (1, 1, -2)$ et $v = (2, 0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Solution. $u \cdot v = 2 + 0 - 2 = 0$ donc $u \perp v$.

Question 11. VRAI ou FAUX ?
Soit $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$. La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Question 11. VRAI ou FAUX ?
Soit $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$. La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution. Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, on conclut que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Question 12. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Question 12. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Solution. Le rang de A est 3 (car le système associé est échelonné et possède 3 pivots) donc, comme A est une matrice carrée d'ordre 3, A est inversible.

Question 13. Soit f et g deux automorphismes d'un espace vectoriel E. La composée $f \circ g$ est-elle un automorphisme de E ? Si oui, quel est son automorphisme réciproque ?

Question 13. Soit f et g deux automorphismes d'un espace vectoriel E. La composée $f \circ g$ est-elle un automorphisme de E ? Si oui, quel est son automorphisme réciproque ?

Solution. Par théorème, $f \circ g$ est un automorphisme de E est $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Question 14. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si $A^2 = 0_2$ alors $A = 0_2$.

Question 14. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si $A^2 = 0_2$ alors $A = 0_2$.

Solution. FAUX.
Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = 0_2$ mais $A \neq 0_2$.

Question 15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $E_1(f) = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $E_3(f) = \text{Vect}((-1,2,1))$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Question 15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $E_1(f) = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $E_3(f) = \text{Vect}((-1,2,1))$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution. Comme les deux vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (0,1,1)$ ne sont pas colinéaires, (u,v) est libre donc $\dim(E_1(f)) = 2$. De plus, $(-1,2,1) \neq (0,0,0)$ donc $\dim(E_3(f)) = 1$. Ainsi,

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_3(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

donc, par théorème, f est diagonalisable.

Question 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer $f(1,0,1)$.

Question 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer $f(1, 0, 1)$.

Solution.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc $f(1, 0, 1) = (2, 1, 2)$.

Question 17. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathsf{Sp}(f) = \{0, -1\}$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Question 17. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, -1\}$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Solution. Comme 0 est valeur propre de f, f n'est pas injectif donc f n'est pas bijectif.

Question 18. Classer les espaces vectoriels suivants dans l'ordre croissant de leurs dimensions.

$$E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \qquad F = \mathbb{R}_9[X] \qquad G = \mathbb{R}^8.$$

Question 18. Classer les espaces vectoriels suivants dans l'ordre croissant de leurs dimensions.

$$E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \qquad F = \mathbb{R}_9[X] \qquad G = \mathbb{R}^8.$$

Solution. $\dim(E) = 3 \times 3 = 9$, $\dim(F) = 9 + 1 = 10$ et $\dim(G) = 8$ donc, dans l'ordre croissant des dimensions, on a : G, E et F.

Question 19. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $A^3 = 0_3$ alors, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = 0_3$.

Question 19. VRAI ou FAUX ?
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $A^3 = 0_3$ alors, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = 0_3$.

Solution. VRAI.
Pour tout entier $k \geqslant 3$,

$$A^k = A^3 A^{k-3} = 0_3 A^{k-3} = 0_3.$$

Question 20. La famille $((1,1,0),(1,-1,0))$ est-elle une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$?

Question 20. La famille $((1,1,0),(1,-1,0))$ est-elle une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$?

Solution. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, toute base de $\mathbb{R}^3$ est composée de 3 vecteurs. Ainsi, $((1,1,0),(1,-1,0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 21. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont le noyau est $\mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,0))$.
Déterminer le rang de f.

Question 21. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont le noyau est $\text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,0))$.
Déterminer le rang de f.

Solution. Les deux vecteurs $u = (1,1,0,0)$ et $v = (0,1,1,0)$ ne sont pas colinéaires donc (u,v) est libre et ainsi $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Vect}(u,v)) = 2$.
Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Question 22. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $\deg(P) = 3$ et $\deg(Q) = 2$. Déterminer $\deg(PQ)$ et $\deg(P \circ Q)$.

Question 22. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
On suppose que $\deg(P) = 3$ et $\deg(Q) = 2$.
Déterminer $\deg(PQ)$ et $\deg(P \circ Q)$.

Solution. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = 5$ et
$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q) = 6$.

Question 23. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. L'application f peut-elle être bijective ?

Question 23. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. L'application f peut-elle être bijective ?

Solution. L'application f ne peut pas être bijective car $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Précisément, comme $\dim(\mathbb{R}^3) > \dim(\mathbb{R}^2)$, f ne peut pas être injective.

Question 24. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$ {}^t(AB) = {}^tA\ {}^tB. $$

Question 24. VRAI ou FAUX ?
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$^t(AB) = {}^tA\,{}^tB.$$

Solution. FAUX.

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $^t(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais ${}^tA\,{}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'égalité correcte est $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Question 25. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.
Quelle est la dimension de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$?

Question 25. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.
Quelle est la dimension de $F = \text{Vect}(u, v, w)$?

Solution. On peut remarquer que $w = u + v$ donc $F = \text{Vect}(u, v)$. De plus, les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre et ainsi (u, v) est une base de F. On conclut donc que $\dim(F) = 2$.

Question 26. VRAI ou FAUX ?

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Question 26. VRAI ou FAUX ?

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Solution. VRAI.

La matrice M est une matrice symétrique à coefficients réels donc, par le théorème spectral, M est diagonalisable (en base orthonormée).

Question 27. Soit $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $v = (1, 1, 1)$.
Déterminer le projeté orthogonal de v sur F.

Question 27. Soit $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $F = \text{Vect}(u)$ et $v = (1, 1, 1)$.
Déterminer le projeté orthogonal de v sur F.

Solution. On peut remarquer $\|u\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2} = 1$ donc (u) est une base orthonormée de F. Ainsi, le projeté orthogonal de v sur F est

$$p(v) = (v \cdot u)u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0\right) u = \sqrt{2}u$$

donc $p(v) = (1, 1, 0)$.

Question 28. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Question 28. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Solution.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\} \\ &= \{(x, y, x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

donc $F = \text{Vect}((u, v))$ où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 1)$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre et ainsi (u, v) est une base de F. On conclut donc que $\dim(F) = 2$.

Question 29. VRAI ou FAUX ?
Pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$.

Question 29. VRAI ou FAUX ?
Pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$.

Solution. VRAI.
Le discriminant de $P = X^2 - X + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ et le coefficient dominant de P est $a = 1 > 0$ donc, pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$.

Question 30. Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Question 30. Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Solution. $\det(D) = a^2 - (-1) = a^2 + 1 > 0$ donc $\det(D) \neq 0$ et ainsi D est inversible.