⧫ Rappels sur les limites de suites

I. — Définitions

1) Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1

On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Le réel M est alors appelé un **majorant** de la suite.
De même, on dit qu'une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Le réel m est alors appelé un **minorant** de la suite.
On dit qu'une suite est **bornée** quand elle est à la fois majorée et minorée.

2) Suites convergentes

Définition 2

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ ou **tend vers** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Propriété 3

1. Si une suite converge, alors sa limite est unique.
2. Si une suite réelle (u_n) converge, alors elle est bornée.

3) Suites divergeant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Définition 4

On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** ou **diverge vers** $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$. On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** ou **diverge vers** $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant A$.On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

II. — Opérations sur les limites

Le tableau suivant donne les limites de la somme, du produit et du quotient de suites dont on connaît les limites éventuelles, dans les cas où c'est possible directement.

Dans ce tableau, ℓ et ℓ' sont deux réels non nuls.

L'existence du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

La forme indéterminée signifie qu'il n'existe pas de formule générale. Mais on peut dans certains cas « lever l'indétermination ».

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \times v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
0	ℓ'	ℓ'	0	0
ℓ	0	ℓ	0	$\pm\infty$ pas de limite
0	0	0	0	indéterminé
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	indéterminé	$\pm\infty$ pas de limite
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$	indéterminé

III. — Limites de référence

Théorème 5

1. Si a est un réel alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n^k\right) = -\infty$.
3. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Propriété 6

Soit q un réel.

- Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) diverge sans avoir de limite.
- Si $|q| < 1$ (i.e. si $-1 < q < 1$) alors (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.

IV. — Limites et ordre

1) Convergence des suites monotones

Théorème 7

Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas, si l'on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
De même, une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée. Dans ce cas, si l'on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Théorème 8

1. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
2. Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

2) Convergence et comparaison

Théorème 9. — Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite ℓ. Si (w_n) est une suite telle qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$$

alors (w_n) est convergente et sa limite est ℓ.

Théorème 10. — Comparaison de suites divergentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

V. — Relations de comparaison

1) Croissances comparées

Théorème 11

Soit α et λ deux réels strictement positifs. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\exp(\lambda n)} = 0$$

2) Suites équivalentes

Définition 12 : Relation d'équivalence

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes**, si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

Théorème 13

1. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.

Propriété 14. — Opérations sur les suites équivalentes

- si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$;
- si $u_n \sim v_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$;
- si $u_n \sim v_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ et, en particulier, avec $\alpha = -1$ on obtient $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- On **ne peut pas additionner** des équivalents.
- On **ne peut pas composer** les équivalents avec une fonction.

Propriété 15

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.

Propriété 16. — Équivalents classiques au voisinage de 0

Si une suite réelle (u_n) tend vers 0 alors

$$\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n \qquad \ln(1+u_n) \sim u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{{u_n}^2}{2}$$