⧫ Sujet 1

Une particule se déplace entre trois points A, B et C. On ne connaît pas sa position initiale. Lorsque la particule est située en :

- A, elle va en B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et en C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- B, elle va en A avec une probabilité $\frac{3}{4}$ et en C avec une proba $\frac{1}{4}$;
- C, elle va en B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que la particule soit en A, en B et en C après n déplacements.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases}.$$

2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de A.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

6. En déduire les valeurs propres de M, en utilisant la relation de la question **3.**.

7. Justifier qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

8. On note, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n : « la particulier se trouve en A après n déplacements », B_n : « la particulier se trouve en B après n déplacements » et C_n : « la particulier se trouve en C après n déplacements ».

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{3}{4} + c_n \times 0 = \frac{3}{4} b_n. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times 0 + c_n \times 1 = \frac{3}{4} a_n + c_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = \mathbf{P}(C_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{C+1} \mid B_n) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(C_{n+1} \mid C_n) \\ &= a_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{cases}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} b_n \\ \frac{3}{4} a_n + c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}$.

3. $M = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M = \frac{1}{4} A}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Comme $M^0 = I_3$, $M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, grâce au résultat de la question **2.**,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}}$.

5. 1$^{\text{re}}$ méthode : détermination par le calcul

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} 3y = \lambda x \\ 3x + 4z = \lambda y \\ x + y = \lambda z \end{cases} .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} -\lambda x + 3y = 0 & L_1 \\ 3x - \lambda y + 4z = 0 & L_2 \\ x + y - \lambda z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 3x - \lambda y + 4z = 0 & L_2 \\ -\lambda x + 3y = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \\ -(\lambda+3)y + (4+3\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ (3+\lambda)y - \lambda^2 z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - \lambda z = 0 & L_1 \\ -(\lambda+3)y + (4+3\lambda)z = 0 & L_2 \\ (-\lambda^2 + 3\lambda + 4)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, (S) n'est pas de rang 2 si et seulement si $\lambda+3=0$ ou $-\lambda^2+3\lambda+4=0$. La première équation équivaut à $\lambda=-3$. Pour le seconde, le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4\times(-1)\times 4 = 25$ donc celle-ci possède deux solutions réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 4 \qquad \text{et } \lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -1.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-3\,;4\,;-1\}}$.

2$^{\text{de}}$ méthode : détermination à l'aide de Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.array([[0,3,0], [3,0,4], [1,1,0]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([ 4., -3., -1.]), array([[-5.66315014e-01,
   -7.0
7106781e-01, -8.01783726e-01],
[-7.55086685e-01,  7.07106781e-01,  2.67261242e
-01],
[-3.30350425e-01,  3.43839982e-17,  5.34522484e
-01]]))
```

on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{4\,;-3\,;-1\}}$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $MX = \lambda X$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que$\frac{1}{4}AX = \lambda X$ si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = (4\lambda)X$. Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $4\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;-\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\}}$.

7. Comme M est une matrice carrée d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes, par théorème, M est diagonalisable donc il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

8. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ donc, grâce à la question **4.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = PD^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

donc, en multipliant à gauche par P^{-1},

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}}.$$

⧫ Sujet 2

Un éleveur possède 100 lapins qui doivent se faire tatouer. Il choisit successivement des lapins au hasard : si le lapin est tatoué, on le repose dans le clapier ; sinon, on le tatoue et on le repose dans le clapier. On continue ainsi jusqu'à avoir tatoué tous les lapins.

On modélise la situation en assimilant chaque lapin à un jeton et le clapier à une urne, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tatouer tous les lapins.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de tirages effectués, une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, pour obtenir un n-ème jeton différent des précédents. Par exemple, si les tirages donnent :

$$3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 4, \ldots$$

alors $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3$, etc

Première partie

1. Donner la loi de X_1, ainsi que son espérance.

2. Donner la loi de X_2, ainsi que son espérance.

3. Soit un entier $n \in [\![1, 100]\!]$. Donner la loi de X_n, ainsi que son espérance.

4. Calculer l'espérance de X. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Deuxième partie

1. Vérifier que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}.$$

2. Soit $j \in [\![2, 100]\!]$. Montrer que

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

3. En déduire que

$$\int_1^{101} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

puis donner un encadrement de $\mathbf{E}(X)$ à l'aide de la fonction ln.

Troisième partie

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{100} sont indépendantes.

1. Exprimer $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$, …, $\mathbf{V}(X_n)$.

2. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Solution.

Première partie

1. La variable aléatoire est X_1 est constante égale à 1 puisqu'aucun jeton n'a été tiré avant le premier. Ainsi, $\boxed{\text{la loi de } X_1 \text{ est la loi certaine telle que } \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1}$. Son espérance est donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 1}$.
2. Une fois qu'un premier jeton k a été tiré, la succession de tirages qui suit est un schéma de Bernoulli (puisqu'il y a remise) en prenant comme succès l'évènement S : « ne pas tirer le jeton k ». La variable X_2 est alors égale au rang du premier succès donc, par propriété, elle suit $\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre } \mathbf{P}(S) = \frac{99}{100}}$. On en déduit que son espérance est $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = \frac{100}{99}}$.
3. Une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, la succession de tirages qui suit est un schéma de Bernoulli (puisqu'il y a remise) en prenant comme succès l'évènement S : « ne pas tirer un jeton tiré précédemment k ». La variable X_n est alors égale au rang du premier succès donc elle suit $\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre } \mathbf{P}(S) = \frac{100-(n-1)}{100} = \frac{101-n}{100}}$. On en déduit que son espérance est $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{100}{101-n}}$.
4. Par définition $X = \sum\limits_{k=1}^{100} X_k$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{100} \mathbf{E}(X_n)$ donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{100} \frac{100}{101-n}}.$$

Deuxième partie

1. À l'aide du changement d'indice $j = 101 - n$, il vient

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}}.$$

2. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc, pour tout $t \in [j\,;j+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{j}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j}(j+1-j) = \frac{1}{j}.$$

De même, pour tout $t \in [j-1\,;j]$, $\dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{j}$ donc

$$\int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j}(j-(j-1)) = \frac{1}{j}.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}.$$

3. En sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{j=2}^{100}\int_j^{j+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=2}^{100}\frac{1}{j} \leqslant \sum_{j=2}^{100}\int_{j-1}^{j}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par la relation de Chasles,

$$\int_2^{101}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=2}^{100}\frac{1}{j} \leqslant \int_1^{100}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $t \in [1\,;2]$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^2 1\,\mathrm{d}t = 1\times(2-1) = 1.$$

On en déduit que

$$\int_1^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_2^{101}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \sum_{j=2}^{100}\frac{1}{j}$$

i.e., par la relation de Chasles et le fait que $\dfrac{1}{1} = 1$,

$$\int_1^{101}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j}.$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j} = 1 + \sum_{j=2}^{100}\frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\int_1^{101}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \leqslant 1 + \int_1^{100}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}.$$

Or,

$$\int_1^{101}\frac{1}{t} = [\ln(t)]_1^{101} = \ln(101) - \ln(1) = \ln(101)$$

et

$$\int_1^{100}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{100} = \ln(100) - \ln(1) = \ln(100)$$

donc

$$\ln(101) \leqslant \sum_{j=1}^{100} \leqslant 1 + \ln(100)$$

En multipliant cette double inégalité par 100, on conclut que

$$\boxed{100\ln(101) \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant 100 + 100\ln(100)}.$$

Troisième partie

1. On a vu dans la première partie que $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$ donc $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)$. Comme X_1, X_2, ..., X_{100} sont indépendantes, on en déduit que

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \sum_{k=1}^{100} \mathbf{V}(X_k)}.$$

2. Comme X_1 suit une loi certaine, $\mathbf{V}(X_1) = 0$. Ensuite, pour tout $k \in [\![2, 100]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{101-k}{100})$ donc

$$\mathbf{V}(X_k) = \frac{1 - \frac{101-k}{100}}{(\frac{101-k}{100})^2} = \frac{k-1}{100} \times \frac{100^2}{(101-k)^2} = \frac{100(k-1)}{(101-k)^2}$$

donc

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \sum_{k=2}^{100} \frac{100(k-1)}{(101-k)^2}}.$$

⧫ Sujet 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux suites réelles. On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}.$$

On se propose de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n grâce à deux méthodes différentes.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

On pose, pour tout entier naturel n,

$$z_n = u_n + \mathrm{i}v_n.$$

1. Écrire un script en Python qui affiche u_n et v_n pour n allant de 0 à 5.
2. Placer les points M_n d'affixes z_n pour n allant de 0 à 5. Expliquer comment évolue $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, z_{n+1} en fonction de z_n.
4. Déterminer une forme exponentielle de $1 - \mathrm{i}$.
5. Donner le terme général de la suite (z_n).
6. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Méthode 2 : à l'aide des matrices

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer une inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Ces matrices seront à coefficients complexes.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Solution.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

On pose, pour tout entier naturel n,

$$z_n = u_n + \mathrm{i}v_n.$$

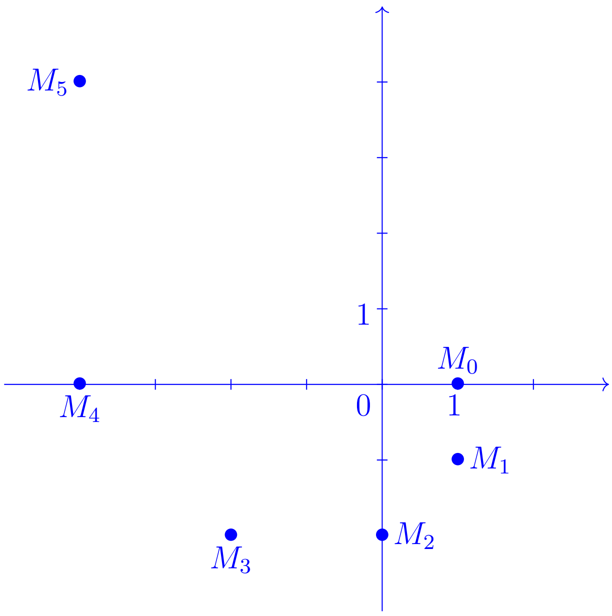
1. Le script suivant convient.

```
u = 1
v = 0
print(u,v)
for n in range(5):
  u,v = u+v, -u+v
  print(u,v)
```

On obtient l'affichage suivant :

```
1 0
1 -1
0 -2
-2 -2
-4 0
-4 4
```

2. On obtient les points suivantes :



Il semble que la suite $(|z_n|)$ soit croissante et que les points « tourne » de $-\frac{\pi}{4}$ entre deux valeurs de n consécutives donc que $\arg(z_{n+1}) = \arg(z_n) - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= u_{n+1} + \mathrm{i}v_{n+1} \\
&= u_n + v_n + \mathrm{i}(-u_n + v_n) \\
&= u_n + v_n - \mathrm{i}u_n + \mathrm{i}v_n \\
&= u_n + \mathrm{i}v_n - \mathrm{i}(u_n + \mathrm{i}v_n) \\
&= z_n - \mathrm{i}z_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (1-\mathrm{i})z_n}$.

4. Le module de $1-\mathrm{i}$ est $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

donc $\boxed{1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = qz_n$ avec $q = 1-\mathrm{i}$ donc la suite (z_n) est géométrique de raison $q = 1-\mathrm{i}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 q^n$. Or, d'une part, $z_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0 = 1$ et, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q^n &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}^n \left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{2^n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

On en déduit donc que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \sqrt{2^n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]}.$$

6. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sqrt{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

donc, étant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{Re}(u_n)$ et $v_n = \mathbf{Im}(u_n)$, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad v_n = -\sqrt{2^n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}.$$

Méthode 2 : à l'aide des matrices

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ -u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AX_n$$

en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. 1re méthode : par le calcul

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible i.e. si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Or,

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 1^2 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Or, le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc elle possède deux solutions complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = 1 - \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_2} = 1 + \mathrm{i}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1-\mathrm{i}\,;1+\mathrm{i}\}$.
Comme A est une matrice carrée d'ordre 2 qui possède 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
Déterminons des vecteurs propres associés à chacune de ses valeurs propres. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (1-\mathrm{i})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+y=(1-\mathrm{i})x\\-x+y=(1-\mathrm{i})y\end{cases} \iff \begin{cases}y=-\mathrm{i}x\\-x=-\mathrm{i}y\end{cases} \iff y=-\mathrm{i}x$$

car $\mathrm{i}^2=-1$ donc $-x=-\mathrm{i}y$ équivaut à $\mathrm{i}^2x=-\mathrm{i}y$ i.e. $-\mathrm{i}x=y$.
Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-\mathrm{i}$.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (1+\mathrm{i})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+y=(1+\mathrm{i})x\\-x+y=(1+\mathrm{i})y\end{cases} \iff \begin{cases}y=\mathrm{i}x\\-x=\mathrm{i}y\end{cases} \iff y=\mathrm{i}x$$

car $\mathrm{i}^2=-1$ donc $-x=\mathrm{i}y$ équivaut à $\mathrm{i}^2x=\mathrm{i}y$ i.e. $\mathrm{i}x=y$.
Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-\mathrm{i}$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ en posant } D = \begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 0\\0 & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}}$.

2$^{\text{de}}$ méthode : à l'aide Python

Grâce au code suivant,

```
import numpy as np

A = np.array([[1,1], [-1,1]])
print(np.linalg.eig(A))
```

qui affiche

```
(array([1.+1.j, 1.-1.j]), array([[0.70710678+0.j,
    0.70710678-0.j],
[0.+0.70710678j, 0.-0.70710678j ]]))
```

Remarque. En Python, le nombre complexe i est noté `j`.
On obtient ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1+\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\}$. On remarque, de plus, que dans la matrice de passage, sur la première colonne, la seconde ligne est égale à i fois la première et, sur la seconde colonne, la seconde ligne est égale à $-\mathrm{i}$ fois la première donc un vecteur propre associé à $1+\mathrm{i}$ est $\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à $1-\mathrm{i}$ est $\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}$.
La suite du raisonnement est identique à celui de la première méthode.

3. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. De plus, D est diagonale donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}(1-\mathrm{i})^n & 0\\0 & (1+\mathrm{i})^n\end{pmatrix}$.
Enfin, $\det(P) = 2\mathrm{i}$ donc, par propriété, $P^{-1} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -1\\\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})^n & 0 \\ 0 & (1+\mathrm{i})^n \end{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n & -(1-\mathrm{i})^n \\ \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^n & (1+\mathrm{i})^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] & -(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n \\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n & \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] \end{pmatrix}}$$

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X^n = A^n X_0$.
Initialisation. Comme $A^0 = I_2$, $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, grâce au résultat de la question **1.**,

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
Étant donné que $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] & -(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n \\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n & \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n\right] \\ (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(1-\mathrm{i})^n + (1+\mathrm{i})^n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}}$$

⧫ Sujet 4

Lors d'un jeu télévisé, 400 ampoules sont allumées dans une pièce.

Un candidat ouvre la porte de la pièce, à l'instant x de son choix ($x \in \mathbb{R}^+$).

Le gain du candidat est égal au nombre d'ampoules encore allumées lorsqu'il ouvre la porte, multiplié par le temps x.

On suppose que les durées de vie des ampoules sont indépendantes les unes des autres, et que la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On note T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

a. Rappeler la densité de T et son espérance.

b. Calculer la variance de T.

c. Montrer que pour tous réels s et t strictement positifs.

$$\mathbf{P}(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$$

2. On note A le nombre d'ampoules encore allumées à l'instant x.
Donner la loi de A ainsi que son espérance et sa variance.

3. On note G le gain du candidat.

a. Exprimer G en fonction de x et de A. En déduire $\mathbf{E}(G)$ en fonction de x.

b. Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle l'espérance du gain est maximale.

4. Dans cette question, on suppose que $x = x_m$.

a. Justifier que l'on peut approximer la loi de A par une loi normale dont on précisera les paramètres.

b. Dans cette question, la probabilité que le gain dépasse 1000 euros est égale à 0,001.
Déterminer une valeur approchée de λ. *On donne* $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$*, où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

Solution.

1. a. La densité de T est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

On a alors $\boxed{\mathbf{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

b. Par le théorème de transfert, la variable T^2 admet une espérance si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit un réel $A > 0$. Les fonctions $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^A t^2 \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[t^2 \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\Big]_0^A - \int_0^A 2t \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -A^2\mathrm{e}^{-\lambda A} + 2\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, par croissance comparée, comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$. De plus, comme T admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$,

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(T).$$

On en déduit donc que

$$\int_0^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 + 2\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(T) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ainsi, T^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(T^2) = \dfrac{2}{\lambda}$. Par la formule de König-Huygens, on en déduit que T admet une variance et que

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{E}(T^2) - \mathbf{E}(T)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{V}(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$.

c. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T > x) &= 1 - \mathbf{P}(T \leqslant x) = 1 - \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \Big[-\mathrm{e}^{\lambda t}\Big]_0^x \\ &= 1 - \Big(-\mathrm{e}^{-\lambda x} - (-\mathrm{e}^0)\Big) = 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x} - 1 = \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Par définition,

$$\mathbf{P}(T > s + t \mid T > s) = \frac{\mathbf{P}(\{T > s+t\} \cap \{T > s\})}{\mathbf{P}(T > s)}.$$

Or, $\{T > s+t\} \subset \{T > s\}$ donc $\{T > s+t\} \cap \{T > s\} = \{T > s+t\}$ donc

$$\mathbf{P}(T > s + t \mid T > s) = \frac{\mathbf{P}(T > s+t)}{\mathbf{P}(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)+\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(T > s+t \mid T > s) = \mathbf{P}(T > t)}.$$

Cela traduit que la loi exponentielle est sans mémoire i.e. que la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie de t heures supplémentaires sachant qu'elle a déjà fonctionné s heures est la même que la probabilité que l'ampoule ait initialement une durée de vie de t heures.

2. Numérotons les ampoules de 1 à 400 et notons, pour tout $k \in [\![1, 400]\!]$, X_k la variable aléatoire de Bernoulli dont le succès est « la variable k est encore allumée à l'instant x ». Alors, la paramètre de X_k est $\mathbf{P}(T > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Comme les durées de vie des ampoules sont supposées indépendantes, les variables aléatoires X_k sont indépendantes.
Or, $A = \sum_{k=1}^{400} X_k$ donc $\boxed{A \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 400 \text{ et } p = \mathrm{e}^{-\lambda x}}$.
On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(A) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ et } \mathbf{V}(A) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})}$.

3. a. Par définition $\boxed{G = xA}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(G) = x\mathbf{E}(A)$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G) = 400x\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

b. Considérons la fonction $g : x \longmapsto 400x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 400\mathrm{e}^{-\lambda x} + 400x(-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}) = 400(1-\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, pour tout réel x, $400\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $1 - \lambda x$. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{1}{\lambda}\right]$ et $g'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[\frac{1}{\lambda}\,;+\infty\right[$. Ainsi, g est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{\lambda}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\lambda}\,;+\infty\right[$. On en déduit que g atteint son maximum en $x_m = \frac{1}{\lambda}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(G) \text{ est maximale en } x_m = \frac{1}{\lambda}}$.

4. On suppose que $x = x_m = \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda x = 1$.

a. Comme $n = 400 \geqslant 30$, $np = 400\mathrm{e}^{-1} \approx 147 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 400(1-\mathrm{e}^{-1}) \approx 252 \geqslant 5$, par le théorème de Moivre-Laplace, on sait que la loi de $B = \dfrac{A - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}$ peut être approximée par une loi normale centrée réduite donc la loi de A peut être approximée par une loi normale d'espérance $400\mathrm{e}^{-1}$ et de variance $400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

b. L'énoncé précise que $\mathbf{P}(G > 1000) = 0{,}001$. Or,

$$\begin{aligned}
G > 1000 &\iff \frac{1}{\lambda}A > 1000 \iff A > 1000\lambda \\
&\iff \frac{A - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} > \frac{1000 - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} \\
B &> \frac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{P}\left(B > \dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) = 0{,}001$ donc, en passant au complémentaire, $\mathbf{P}\left(B \leqslant \dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) = 0{,}999$. Or, comme B suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout réel x, $\mathbf{P}(B \leqslant x) \approx \Phi(x)$. Ainsi, $\varphi\left(\dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}}\right) \approx$ 0,999. Or, Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective et l'énoncé précise que $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$ donc $\dfrac{1000\lambda - 400\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})}} \approx 3{,}0902$.

On en déduit que $\lambda \approx \dfrac{3{,}0902\sqrt{400\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})} + 400\mathrm{e}^{-1}}{1000}$ soit $\boxed{\lambda \approx 0{,}177}$.

⧫ Sujet 5

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' = 5y' - \frac{25}{4}y.$$

Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f : t \longmapsto (at + b)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ème de f.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t,

$$f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}.$$

Dans l'hérédité, on mettra en évidence les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n et de a.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n b_n$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

de deux manières différentes et en déduire une expression de u_n.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n, a et b.

4. On propose de retrouver le résultat précédent par une méthode matricielle.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}BX_n$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de B, n et X_0.

d. Montrer que $B = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Exprimer T en fonction de I_2 et de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Calculer N^2 et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, T^n en fonction de n.

g. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de n.

Solution.

1. L'équation (E) est équivalente à $y'' - 5y' + \dfrac{25}{4}y = 0$ qui est une équation homogène de second ordre.
L'équation caractéristique associée est (C) : $x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + \dfrac{25}{4}$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{25}{4} = 0$ donc (C) possède une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{-5}{2 \times 1} = \dfrac{5}{2}$.
Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$ ».
Initialisation. Par définition, $f^{(0)} = f$ donc, en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$, pour tout réel t, $f^{(0)}(t) = (a_0 t + b_0)f(t)$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$. La fonction $f^{(n)}$ est donc dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$f^{(n+1)}(t) = a_n \mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + (a_n t + b_n) \times \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} = \left(\frac{5}{2}a_n + a_n + \frac{5}{2}b_n\right)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}.$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n$ et $b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n$, pour tout réel t, $f^{(n+1)}(t) = (a_{n+1}t + b_{n+1})\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t, $f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$.
De plus, on a montré que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Ainsi, la suite (a_n) est une suite géométrique de premier terme a et de raison $\dfrac{5}{2}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = a\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} b_{n+1} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\left(a_n + \frac{5}{2}b_n\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \times a\left(\frac{5}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \times \frac{5}{2}b_n \\ &= \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right)^n \times a + \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n b_n \\ &= \frac{2}{5} \times 1^n \times a + 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n b_n \\ &= \frac{2}{5}a + u_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{5}a}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - b_0 = u_n - b.$$

D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} - a_k = \frac{2}{5}a$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{5}a = n \times \frac{2}{5}a = \frac{2}{5}an.$$

Ainsi, on en déduit que $u_n - b = \frac{2}{5}an$ donc $u_n = \frac{2}{5}a_n + b$.

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{5}an + b}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n b_n$ donc $b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n u_n$ donc on déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(\frac{2}{5}an + b\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \times \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}an + b\right)$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\left(an + \frac{5}{2}b\right)}.$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{5}{2}b_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + \frac{5}{2}b_{n+1}.$$

Or, $b_{n+1} = a_n + \frac{5}{2}b_n$ donc $a_n = b_{n+1} - \frac{5}{2}b_n$. Ainsi,

$$b_{n+2} = \frac{5}{2}\left(b_{n+1} - \frac{5}{2}b_n\right) + \frac{5}{2}b_n = \frac{5}{2}b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n + \frac{5}{2}b_{n+1} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n.$$

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{25}{4} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -25 & 20 \end{pmatrix} X_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -25 & 20 \end{pmatrix} \text{ est telle que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \frac{1}{4}BX_n}$.

c. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison $\frac{1}{4}B$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{4}B\right)^n X_0}$.

d. Comme $\det(P) = 2 \times 1 - 5 \times 0 = 2 \neq 0$, P est bien inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -50 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -50 & 40 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{PTP^{-1} = B}$.

e. On observe que $T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{T = 10I_2 + 2N}$.

f. On vérifie que
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc $\boxed{N^2 = 0_2}$.
On en déduit que
$$T^2 = (10I_2 + 2N)(10I_2 + 2N) = 10^2 I_2^2 + 20 I_2 N + 20 N I_2 + 4N^2 = 10^2 I_2 + 40N$$
et
$$T^3 = T^2 T = (10^2 I_2 + 40N)(10I_2 + 2N) = 10^3 I_2^2 + 200 I_2 N + 400 N I_2 + 80 N^2 = 10^3 I_2 + 600N$$
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$ ».
Initialisation. D'une part, $T^0 = I_2$ et, d'autre part, $10^0 I_2 + 2 \times 0 \times 10^{-1} N = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,
$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T = (10^n I_2 + 2n10^{n-1}N)(10I_2 + 2N) \\ &= 10^{n+1} I_2^2 + 2 \times 10^n I_2 N + 2n10^n N I_2 + 4n10^{n-1} N^2 \\ &= 10^{n+1} I_2 2(n+1)10^n N \end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$.
Remarque. On peut aussi obtenir les résultats en utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices. ATTENTION, cependant, on ne peut développer $(A+B)^n$ à l'aide du binôme de Newton que si les matrices A et B commutent. Ici, c'est le cas puisque $I_2 N = N I_2 = N$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} T^n &= (10I_2 + 2N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (10I_2)^k (2N)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k I_2^k \times 2^{n-k} N^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k 2^{n-k} N^{n-k}. \end{aligned}$$
Or, si $n - k \geqslant 2$ i.e. si $k \leqslant n-2$, $N^{n_k} = 0_2$ donc
$$T^n = \sum_{k=n-1}^{n} \binom{n}{k} 10^k 2^{n-k} N^{n-k} = \binom{n}{n-1} 10^{n-1} 2^1 N^1 + \binom{n}{n} 10^n 2^0 N^0 = n10^{n-1} \times 2N + 1 \times 10^n I_2.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 10^n I_2 + 2n10^{n-1}N$.

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 10^n & 2n10^{n-1} \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 10^{n-1}\begin{pmatrix} 10 & 2n \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}$.

g. Comme $B = PTP^{-1}$, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PT^nP^{-1}$ donc
$$\begin{aligned} B^n &= \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2n \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 - 10n & 4n \\ -50 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 20 - 20n & 8n \\ -50n & 20n - 20 \end{pmatrix} = 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10 - 10n & 4n \\ -25n & 10n - 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \left(\frac{1}{4}B\right)^n X_0 = \frac{1}{4^n} B^n X_0 = \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -25n & 10n-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Or, $b_0 = b$ et $b_1 = a_0 + \frac{5}{2}b_0 = a + \frac{5}{2}b$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} 10-10n & 4n \\ -25n & 10n-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \begin{pmatrix} (10-10n)b + 4n\left(a + \frac{5}{2}b\right) \\ -25nb + (10n-10)\left(a + \frac{5}{2}b\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, on déduit de la première ligne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4^n} \times 10^{n-1} \left[(10-10n)b + 4n\left(a + \frac{5}{2}b\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{4} \times 10\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}(10b - 10nb + 4na + 10nb) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{2}b + na\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve bien que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \left(an + \frac{5}{2}b\right)}$.

⧫ Sujet 6

Un concessionnaire dispose de 2 voitures qu'il peut louer chaque jour, pour un prix de 30€. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X est le nombre de clients qui veulent lui louer une voiture ;
- Y est le nombre de voitures qu'il loue ;
- G est le chiffre d'affaire qu'il réalise sur la journée.

1. On suppose dans cette question que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

a. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

b. Déterminer l'espérance et la variance de G.

c. Calculer le chiffre d'affaire réalisé en moyenne par le concessionnaire sur 30 jours.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Solution.

1. a. Par définition, $Y(\omega) = \{0\,;1\,;2\}$. De plus, $\{Y=0\} = \{X=0\}$ donc $\mathbf{P}(Y=0) = \frac{1}{6}$, $\{Y=1\} = \{X=1\}$ donc $\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{4}$ et $\{Y=2\} = \{X \geqslant 2\}$ donc, comme les évènements $\{X=2\}$ et $\{X=3\}$ sont incompatibles, $\mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(X=2)+\mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.
Ainsi, on peut résumer la loi de Y par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{7}{12}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{17}{12}}$.
Enfin,

$$\mathbf{E}(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{7}{12} = \frac{31}{12}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{31}{12} - \left(\frac{17}{12}\right)^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(G) = \frac{83}{144}}$.

b. Par définition, $G = 30Y$ donc, par linéarité de l'espérance $\mathbf{E}(G) = 30\mathbf{E}(Y) = 30 \times \frac{17}{12}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G) = \frac{85}{2}}$.

Par propriété, $\mathbf{V}(G) = 30^2\mathbf{V}(G) = 900\mathbf{V}(G) = 900 \times \frac{83}{144}$ soit $\boxed{\mathbf{V}(G) = \frac{2075}{4}}$.

c. Si on note, pour tout $i \in [\![1, 30]\!]$, G_i le chiffre d'affaire réalisés le jour i alors le chiffre d'affire total sur 30 jours est $T = G_1 + G_2 + \cdots + G_{30}$. Par linéarité de la moyenne, on en déduit que le chiffre d'affaoire moyen sur 30 jours est $\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}(G_i)$. Or, chaque G_i à la même loi que G donc $\mathbf{E}(T) = 30\mathbf{E}(G)$ i.e. $\mathbf{E}(T) = 1275$. Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est 1275€}}$.

2. a. De même, $\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(X=0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ et $\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(X=1) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$. Enfin, $\mathbf{P}(Y=2) = 1 - \mathbf{P}(Y=0) - \mathbf{P}(Y=1) = \frac{57}{64}$.
Ainsi, on peut résumer la loi de Y par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y=k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{57}{64}$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{3}{32} + 2 \times \frac{57}{64}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{15}{8}}$.

De plus,

$$\mathbf{E}(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{64} + 1^2 \times \frac{3}{32} + 2^2 \times \frac{57}{64} = \frac{117}{32}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{117}{32} - \left(\frac{15}{8}\right)^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(G) = \frac{9}{64}}$

b. On en déduit que $\mathbf{E}(G) = 30 \times \frac{15}{8}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(G) = \frac{225}{4}}$ et $\mathbf{V}(G) = 900 \times \frac{9}{64}$ soit $\boxed{\mathbf{V}(G) = \frac{2025}{16}}$.

c. Avec les mêmes notations que précédemment, $\mathbf{E}(T) = 30\mathbf{E}(G)$ i.e. $\mathbf{E}(T) = \frac{3375}{2}$.
Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est 1687,50€}}$.

3. a. De même, $\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{2^1}{1!}\mathrm{e}^{-2} = 2\mathrm{e}^{-2}$. Enfin, $\mathbf{P}(Y = 2) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) - \mathbf{P}(Y = 1) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}$.
Ainsi, on peut résumer la loi de Y par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y = k)$	e^{-2}	$2\mathrm{e}^{-2}$	$1 - 3\mathrm{e}^{-2}$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \times \mathrm{e}^{-2} + 1 \times 2\mathrm{e}^{-2} + 2 \times (1 - 3\mathrm{e}^{-2})$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2}}$.

De plus,

$$\mathbf{E}(Y^2) = 0^2 \times \mathrm{e}^{-2} + 1^2 \times 2\mathrm{e}^{-2} + 2^2 \times (1 - 3\mathrm{e}^{-2}) = 4 - 10\mathrm{e}^{-2}$$

donc, par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 &= 4 - 10\mathrm{e}^{-2} - \left(2 - 4\mathrm{e}^{-2}\right)^2 \\ &= 4 - 10\mathrm{e}^{-2} - (4 - 16\mathrm{e}^{-2} + 16e^{-4})\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{V}(G) = 6\mathrm{e}^{-2} - 16\mathrm{e}^{-4}}$.

b. On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(G) = 30(2 - 4\mathrm{e}^{-2})}$ et $\boxed{\mathbf{V}(G) = 900(6\mathrm{e}^{-2} - 16\mathrm{e}^{-4})}$.

c. Avec les mêmes notations que précédemment, $\mathbf{E}(T) = 30\mathbf{E}(G) = 30(60 - 120\mathrm{e}^{-2})$.
Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du concessionnaire sur 30 jours est environ 1312,79€}}$.

⧫ Sujet 7

Dans une clinique vétérinaire, on note X le nombre de chats et Y le nombre de chiens présents lors d'une semaine. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu \geqslant 0$.

1. Rappeler la définition de la loi de Poisson.

2. Rappeler l'espérance de X. Démontrer la formule.

3. Rappeler la variance de X. Démontrer la formule.

4. On pose $Z = X + Y$.

a. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

b. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Z.

c. Exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ en fonction de X et Y.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer et simplifier l'expression $\dfrac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$

e. Démontrer que Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

5. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

On suppose dans la suite que $\lambda = 13$ et $\mu = 17$. La clinique est capable d'accueillir un maximum de 80 animaux.

a. Majorer la probabilité de l'évènement $(Z \geqslant 80)$.

b. La clinique devrait-elle investir pour augmenter sa capacité d'accueil ?

Solution.

1. On dit qu'une variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}}$ et si, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

2. Par théorème $\mathbf{E}(X)=\lambda$. Pour le démontrer, considérons une entier $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X=k)&=\sum_{k=0}^{n} k\times\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\times\frac{\lambda^k}{k\times(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\\ &\underset{j=k-1}{=}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^{j+1}}{j!}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda\end{aligned}$$

Ainsi, la série $n\mathbf{P}(X=n)$ converge et sa somme vaut λ donc X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X)=\lambda}$.

3. Par théorème $\mathbf{V}(X)=\lambda$. Pour le démontrer, considérons une entier $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbf{P}(X=k)&=\sum_{k=0}^{n} k^2\times\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k^2\times\frac{\lambda^k}{k\times(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}+\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Or, d'une part,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)\times(k-2)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\\ &\underset{j=k-2}{=}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^{j+2}}{j!}=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda^2\end{aligned}$$

et, d'autre part, d'après le calcul de la question précédente,

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X=k)\xrightarrow[n\varnothing+\infty]{}\mathbf{E}(X)=\lambda.$$

Ainsi, la série $n^2\mathbf{P}(X=n)$ converge et sa somme vaut $\lambda^2+\lambda$ donc, par le théorème de transfert, X^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(X^2)=\lambda^2-\lambda$.

Dès lors, par la formule de König-Huygens, X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(X)=\lambda}$.

Autre méthode. On peut commencer par calculer la variance de $X(X-1)$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(X=k)&=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\times\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\times\frac{\lambda^k}{k(k-1)\times(k-2)!}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}=\underset{j=k-2}{=}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^{j+2}}{j!}\\ &=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\lambda^j}{j!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda^2\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum n(n-1)\mathbf{P}(X=n)$ converge et sa somme vaut λ^2. Par le théorème de transfert, on en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X(X-1))=\lambda^2$. Or, $X^2=X(X-1)+X$ donc, comme $X(X-1)$ et X admet une espérance, par linéarité, X^2 admet une espérance et $\mathbf{E}(X^2)=\mathbf{E}(X(X-1))+\mathbf{E}(X)=\lambda^2+\lambda$. Ensuite, on conclut comme dans la première méthode à l'aide du la formule de König-Huygens.

4. **a.** Par linéarité, $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Z)=\lambda+\mu}$.

De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbf{V}(Z)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(Z)=\lambda+\mu}$.

b. $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $\boxed{Z(\Omega)=\mathbb{N}}$.

c. Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors, comme $((X=i))_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}(Z=k)&=\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty}(X=i)\right)\cup(Z=k)=\bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Z=k)]\\&=\bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(X+Y=k)]=\bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Y=k-X)]\\&=\bigcup_{i=0}^{+\infty}[(X=i)\cap(Y=k-i)]\end{aligned}$$

De plus, si $i>k$ alors $k-i<0$ donc $(Y=k-i)=\varnothing$. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{(Z=k)=\bigcup_{i=0}^{k}[(X=i)\cap(Y=k-i)]}.$$

d. Grâce à la formule du binôme de Newton,

$$\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-1}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\mu^{k-1}}{i!(k-i)!}$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-1}}{(k-i)!}}.$$

e. Soit $k\in\mathbb{N}$. D'après le résultat de la question **c.**,

$$\mathbf{P}(Z=k)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k}[(X=i)\cap(Y=k-i)]\right).$$

Or, les évènements $(X=i)$ pour $i\in[\![0,k]\!]$ sont deux à deux disjoints donc

$$\mathbf{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)$$

et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\mu}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}.$$

Ainsi, grâce au résultat de la question **d.**,

$$\mathbf{P}(Z=k)=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}$$

donc $\boxed{Z \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda+\mu}$.

5. **a.** D'après la question précédente, Z suit une loi de Poisson de paramètre $13+17=30$ donc $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{V}(Z)=30$. En remarquant que

$$Z \geqslant 80 \Rightarrow Z-30 \geqslant 50 \Rightarrow |Z-30| \geqslant 50,$$

on peut affirmer que $(Z \geqslant 80) \subset (|Z-\mathbf{E}(Z)| \geqslant 50)$ donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

$$\mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant \mathbf{P}(|Z-\mathbf{E}(Z)| \geqslant 50) \leqslant \frac{30}{50^2} = \frac{3}{250}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant 0{,}012}$.

b. La probabilité que la capacité d'accueil de la clinique soit dépassée est

$$\mathbf{P}(Z > 80) \leqslant \mathbf{P}(Z \geqslant 80) \leqslant 0{,}012$$

donc $\boxed{\text{la clinique n'a pas intérêt à s'agrandir}}$.

⧫ Sujet 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(E_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2} y''(t) + y(t) = \sin(t).$$

1. a. Montrer que la fonction $f_1 : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{2}$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, si $n \neq 1$, la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation différentielle :

$$(F_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + n^2 y(t) = n^2 \sin(t).$$

3. a. Résoudre l'équation homogène associée à (F_n).

b. Donner la forme générale des solutions de (F_n) (et donc de (E_n)).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'unique solution g_n de (E_n) vérifiant $g_n(0) = 0$ et $g'_n(0) = 0$.

5. Déterminer, pour tout réel t, la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. **a.** La fonction f_1 est deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produit et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. De plus, pour tout réel t,

$$f_1'(t) = \frac{\cos(t) - (\cos(t) - t\sin(t))}{2} = \frac{t\sin(t)}{2}$$

et

$$f_1''(t) = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{2}$$

donc

$$f_1''(t) + f_1(t) = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{2} = \sin(t)$$

donc $\boxed{f_1 \text{ est solution de } (E_1)}$.

b. Supposons $n \geqslant 2$ et $f : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car proportionnelle à la fonction sinus et, pour tout réel t,

$$f''(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin''(t) = -\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$$

donc, pour tout réel t,

$$\frac{1}{n^2}f''(t)+f(t) = -\frac{1}{n^2}\times\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)+\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) = \left(-\frac{1}{n^2-1}+\frac{n^2}{n^2-1}\right)\sin(t) = \sin(t).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien solution de } (E_n) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Pour toute fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$\frac{1}{n^2}y''(t)+y(t) = \sin(t) \underset{n\neq 0}{\Longleftrightarrow} n^2\left(\frac{1}{n^2}y''(t)+y(t)\right) = n^2 sin(t) \Longleftrightarrow y''(t)+n^2y(t) = n^2\sin(t)$$

donc $\boxed{(E_n) \text{ est équivalente à } (F_n)}$.

3. **a.** L'équation homogène associée à (F_n) est $(H_n) : y''+n^2y = 0$. L'équation caractéristique associée à (H_n) est $(C_n) : x^2+n^2 = 0$ qui est équivalente à $(x-in)(x+in) = 0$ donc (C_n) possède deux solutions complexes conjuguées : $x_1 = in$ et $x_2 = -in$. Par théorème, l'ensemble des solutions de (H_n) est

$$\{t \longmapsto \mathrm{e}^{0t}(A\cos(nt)+B\sin(nt)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

i.e.

$$\boxed{\{t \longmapsto A\cos(nt)+B\sin(nt) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

b. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_n) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{\sin(t)-t\cos(t)}{2}+A\cos(nt)+B\sin(nt) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si } n = 1}.$$

et

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)+A\cos(nt)+B\sin(nt) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si } n \geqslant 2}.$$

4. **1$^{\text{re}}$ cas : si** $n=1$. On peut remarquer que la fonction f_1 vérifie

$$f_1(0)=\frac{\sin(0)-0\times\cos(0)}{2}=0$$

et

$$f_1'(0)=\frac{0\times\sin(0)}{2}=0$$

donc $\boxed{g_1=f_1}$.

2$^{\text{nd}}$ cas : si $n\geqslant 2$. Soit A et B deux réels et

$$g:t\longmapsto\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)+A\cos(nt)+B\sin(nt).$$

Alors, pour tout réel t,

$$g'(t)=\frac{n^2}{n^2-1}\cos(t)-nA\sin(nt)+nB\cos(nt)$$

donc

$$\begin{cases}g(0)=0\\ g'(0)=0\end{cases}\iff\begin{cases}A=0\\ \dfrac{n^2}{n^2-1}+nB=0\end{cases}\iff\begin{cases}A=0\\ B=-\dfrac{n}{n^2-1}\end{cases}.$$

Ainsi, $g_n:t\longmapsto\dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)-\dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt)$.

On conclut donc que, pour tout réel g_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}\quad g_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(t)-t\cos(t)}{2} & \text{si } n=1\\ \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)-\dfrac{n}{n^2-1}\sin(nt) & \text{si } n\geqslant 2\end{cases}}.$$

5. Soit $t\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\geqslant 2$,

$$g_n(t)=\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)-\frac{n}{n^2-1}\sin(nt).$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n^2}{n^2-1}\sim\dfrac{n^2}{n^2}\sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)=\sin(t)$. De plus, pour tout $n\geqslant 2$,

$$0\leqslant\left|\frac{n}{n^2-1}\sin(nt)\right|\leqslant\frac{n}{n^2-1}|\sin(nt)|\leqslant\frac{n}{n^2-1}.$$

Or, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n}{n^2-1}\sim\dfrac{n}{n^2}\sim\dfrac{1}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n^2-1}\sin(nt)\right|=0$ et donc, par propriété, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-1}\sin(nt)=0$.

Par somme de limite, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}g_n(t)=\sin(t)}$.

⧫ Sujet 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Démontrer qu'il existe un réel α tel que $B^2 = \alpha B$.

2. a. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre B^n et B.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Préciser X_0.

b. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

c. Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonlisable.

d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de M^n en fonction de n.

f. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n et en déduire une expression de A^n en fonction de n.

Solution.

1. On calcule d'abord
$$B = A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
donc
$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
donc $\boxed{B^2 = -2B}$.

2. a. Comme $B^2 = -2B$, on a $B^3 = B^2B = (-2B)B = -2B^2 = -2(-2B) = 4B$ puis $B^4 = B^3B = (4B)B = 4B^2 = 4(-2B) = -8B$ et on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-2)^{n-1}B$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = (-2)^{n-1}B$ ».
Initialisation. $(-2)^{1-1}B = (-2)^0B = 1B = B$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,
$$B^{n+1} = B^nB = ((-2)^{n-1}B)B = (-2)^{n-1}B^2 = (-2)^{n-1}(-2B) = (-2)^nB$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = (-2)^{n-1}B}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition, $\mathcal{Q}(n)$: « il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$ ».
Initialisation. $A^0 = I = 0A + 1I$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors,
$$A^{n+1} = A^nA = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA.$$
Or, $A = B + 3I$ donc $A^2 = (B+3I)(B+3I) = B^2 + 3B + 3B + 9I = B^2 + 6B + 9I$ et, comme $B^2 = -2B$, $A^2 = 4B + 9I = 4(A - 3I) + 9I = 4A - 3I$. Dès lors,
$$A^{n+1} = a_n(4A - 3I) + b_nA = (4a_n + b_n)A - 3a_nI$$
donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie en posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n$.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe des réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = a_nA + b_nI}$.

4. a. D'après la démonstration précédente, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ donc $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

b. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -3a_n \end{cases}.$$
donc
$$X_{b+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_n + b_n \\ -3a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MX_n$$
en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 4X + 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles

$$\lambda_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1\,;3\}}$.

Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 admettant 2 valeurs propres distinctes, par théorème, M est diagonalisable.

d. Déterminons des vecteurs associés à chacune des valeurs propres de M.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$MV = V \iff \begin{cases} 4x + y = x \\ -3x = y \end{cases} \iff y = -3x$$

donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$MV = 3V \iff \begin{cases} 4x + y = 3x \\ -3x = 3y \end{cases} \iff y = -x$$

donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

On en déduit qu'en posant $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } M = PDP^{-1}}$.

e. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Or, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. De plus, $\det(P) = 1 \times (-1) - (-3) \times 1 = 2$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3^{n+1} & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 1 & 3^n - 1 \\ 3 - 3^{n+1} & 3 - 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 1 & 3^n - 1 \\ 3 - 3^{n+1} & 3 - 3^n \end{pmatrix}}$.

f. La suite (X_n) est une suite géométrique de matrices colonne de raison M donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 1 & 3^n - 1 \\ 3 - 3^{n+1} & 3 - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3 - 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{3^n - 1}{2} \text{ et } b_n = \dfrac{3 - 3^n}{2}}$.
On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(3^n - 1) & 3^n - 1 & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 2(3^n - 1) & 1 - 3^n \\ 0 & 0 & 3^n - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 & 1 - 3^n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

⧫ Sujet 10

On considère les polynômes $P_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k(X) = X^k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composée de $X+1$ suivie de P.
Par exemple, si $P(X) = X^3$ alors $P(X+1) = (X+1)^3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est une endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Montrer que la matrice de Δ_2 dans $\mathcal{B}_2$ est $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Quelles sont les valeurs propres de M_2 ? La matrice M_2 est-elle diagonalisable.

3. a. Déterminer la matrice M_3 de Δ_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.

b. La matrice M_3 est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

4. a. Déterminer le noyau et l'image de Δ_3.

b. En déduire que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$Q(X) = P(X+1) - P(X).$$

Ce polynôme P est-il unique ?

5. a. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente une valeur explicite de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en fonction de n.

Solution.

1. Rappelons que si P et Q sont deux polynômes alors, pour tous réels λ et μ, $\deg(\lambda P+\mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ et, si Q n'est pas constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\deg(X+1) = 1$, $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$ donc $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant \deg(P)$ et ainsi $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\
&= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\
&= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(x)) \\
&= \lambda \Delta_n(P) + \mu \Delta_n(Q)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Delta_n \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. a. Par définition, $\Delta_2(P_0) = 1 - 1 = 0$, $\Delta_2(P_1) = X + 1 - X = 1 = P_0$ et $\Delta_2(P_2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 = P_0 + 2P_1$ donc

$$\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. La matrice M_2 est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux. Ainsi, $\boxed{\text{l'unique valeur propre de } M_2 \text{ est } 0}$. Si M_2 était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $M_2 = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de M_2. Dans cas, comme $\mathrm{Sp}(M_2) = \{0\}$, $D = 0_3$ donc $PDP^{-1} = 0_3$. Or $M_2 \neq 0_3$ donc $\boxed{M_2 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3. a. Comme précédemment, $\Delta_3(P_0) = 0$, $\Delta_3(P_1) = P_0$, $\Delta_3(P_2) = P_0 + 2P_2$ et $\Delta_3(P_3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 = P_0 + 3P_1 + 3P_2$ donc

$$\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme précédemment, $\mathrm{Sp}(M_3) = \{0\}$ donc, comme $M_3 \neq 0_4$, $\boxed{M_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
De plus, comme 0 est valeur propre de M_3, M_3 n'est pas injective donc $\boxed{M_3 \text{ n'est pas inversible}}$.

4. a. La matrice M_3 est échelonnée et possède 3 pivots donc $\mathrm{rg}(M_3) = 3$. Dès lors, $\mathrm{rg}(\Delta_3) = 3$. Ainsi, par le théorème du rang, $\dim(\ker(\Delta_3)) = 4 - 3 = 1$. Or, on a vu que P_0 est un vecteur non nul appartenant à $\ker(\Delta_3)$ donc $\ker(\Delta_3) = \mathrm{Vect}(P_0)$ i.e. $\boxed{\ker(\Delta_3) = \mathbb{R}_0[X]}$.
De plus, $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_3)) = \mathrm{rg}(\Delta_3) = 3$ et on a vu que les images de P_0, P_1, P_2 et P_3 appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathrm{Im}(\Delta_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathrm{Im}(\Delta_3)) = 3$, on conclut que $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_3) = \mathbb{R}_2[X]}$.

b. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_3)$ donc il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = Q$ c'est-à-dire $\boxed{\text{il existe } P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(X+1) - P(X) = Q}$.
Ce polynôme P n'est pas unique car Δ_3 n'est pas injective. Pour tout polynôme constant R, $\Delta_3(P+R) = \Delta_3(P) + \Delta_3(R) = Q + 0 = Q$ car $R \in \ker(\Delta_3)$.

5. a. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = X^2$ revient matriciellement à déterminer un vecteur $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ tel que $M_3 V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette égalité matricielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ 2c + 3d = 0 \\ 3d = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

donc une solution est $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X}$ est un polynôme de $R_3[X]$ tel que $\Delta_3(P) = X^2$.

b. On en déduit que, pour tout réel t, $t^2 = P(t+1) - P(t)$ donc, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} [P(k+1) - P(k)] \\ &= P(n+1) - P(0) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - 0 \\ &= \frac{n+1}{6}\left[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n) \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

⧫ Sujet 11

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \mathrm{e}^x \end{array}.$$

Définition de la suite (u_n)

1. Dresser le tableau de variations de l'application f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

Dans toute la suite, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la solution de l'équation $f(x) = n$. On définit ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Conjecture sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et représenter sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n). (On pourra s'aider pour le tracé d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique.)

4. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Étude mathématique de la suite (u_n)

5. Étudier les variations de la suite (u_n).

6. En déduire que la suite (u_n) a une limite que l'on déterminera.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln(n)$.

8. Montrer que $e^{u_n} \sim n$.

9. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

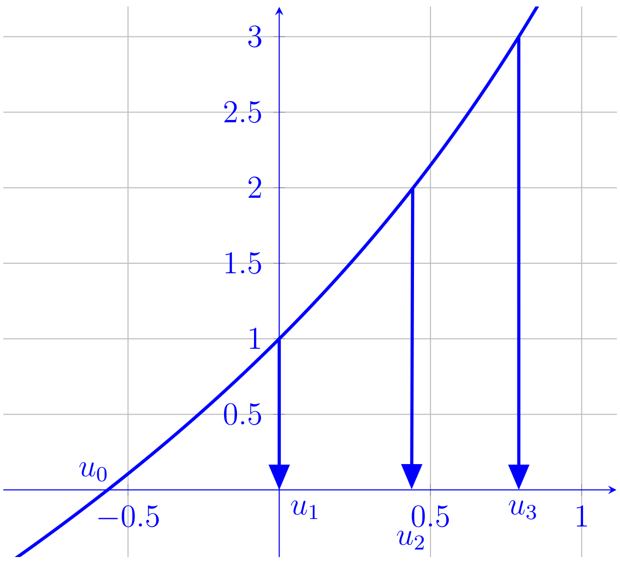
De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'équation } f(x) = n \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}}$.

3. À l'aide de GeoGebra, on obtient l'allure suivante :



4. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$ donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$. Comme f est croissante, on en déduit que que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

6. Comme (u_n) est croissante, elle admet une limite (finie ou infinie) d'après le théorème des suites monotones. Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$. En particulier, $(f(u_n))$ converge. Or, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n$ donc la suite $(f(u_n))$ diverge vers $+\infty$. C'est absurde donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $f(u_n) = n$ et $f(\ln(n)) = \ln(n) + \mathrm{e}^{\ln(n)} = \ln(n) + n$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n) \geqslant 0$ donc $f(\ln(n)) \geqslant n$ i.e. $f(\ln(n)) \geqslant f(u_n)$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln(n) \geqslant u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \ln(n)}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = n$ i.e. $u_n + \mathrm{e}^{u_n} = n$ donc $\mathrm{e}^{u_n} = n - u_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n} = 1 - \dfrac{u_n}{n}$. Or, par croissance de (u_n) et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = u_1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$ donc, en divisant par $n > 0$, $0 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$. Par différence, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n} = 1$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \sim n}$.

9. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n} = 1$. De plus, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n}\right) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{u_n}) - \ln(n) = u_n - \ln(n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{u_n - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\frac{\mathrm{e}^{u_n}}{n})}{\ln(n)}.$$

Par quotient de limites, on en déduit que $\dfrac{u_n}{\ln(n)} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et ainsi $\boxed{u_n \sim \ln(n)}$.

⧫ Sujet 12

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **a.** Rappeler la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

b. Rappeler l'inégalité de Tchebychev et ses hypothèses.

c. Démontrer que $\mathbf{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

d. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Pour tout réel $t \geqslant 0$, si la série converge, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)t^k$.

a. Vérifier que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

b. Exprimer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.

c. Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses.

d. En déduire que, pour tout réel $t > 0$, $\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}$.

e. Déterminer le minimum de la fonction $f : t \longmapsto t-1-2\ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$.

f. Démontrer que, pour tous réels $t > 1$ et $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \Longleftrightarrow t^x \geqslant t^{2\lambda}.$$

g. En déduire $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

3. À l'aide de GeoGebra, comparer les deux majorations de $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda)$ obtenues dans les questions précédentes.

Solution.

1. **a.** Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ signifie que $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ et que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

   Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda}$.

   b. L'inégalité de Bineaymé-Tchebychev stipule que si Y est une variable aléatoire admettant une variance alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

   c. En appliquant cette inégalité à $Y = X$ (qui admet bien une variance) et $\varepsilon = \lambda > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

   i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}}.$$

   d. On remarque que si $X \geqslant 2\lambda$ alors $X - \lambda \geqslant \lambda$ donc $|X - \lambda| \geqslant \lambda$. Ainsi, $\{X \geqslant 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}$ donc, par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \lambda)$$

   et ainsi, grâce à la question précédente,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}}.$$

2. **a.** Pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \geqslant k)t^k = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \times t^k = \frac{(\lambda t)^k}{k}\mathrm{e}^{-\lambda}$ donc, au facteur constant $\mathrm{e}^{-\lambda}$ près, la série $\sum \mathbf{P}(X \geqslant k)t^k$ est une série exponentielle. Elle est donc convergente est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)t^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda t}$$

   donc, $\boxed{\text{pour tout réel } t \geqslant 0,\ G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$.

   b. Soit un réel $t \geqslant 0$. Alors,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbf{P}(X = k)$$

   donc, par le théorème de transfert, $\boxed{G_X(t) = \mathbf{E}(X^t)}$.

   c. L'inégalité de Markov stipule que si Y est une variable aléatoire positive admettant une espérance alors, pour tout réel $a > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

d. Soit un réel $t > 0$. D'après la question **2.b.**, la variable aléatoire $Y = t^X$ admet une espérance égale à $G_X(t)$. De plus, elle est positive donc, en lui appliquant l'inégalité de Markov avec $a = t^{2\lambda} > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

Or, $t^{2\lambda} = \mathrm{e}^{2\lambda \ln(t)}$ donc

$$\frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-t)}}{\mathrm{e}^{2\lambda \ln(t)}} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)-2\lambda \ln(t)} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}.$$

Ainsi, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout réel } t > 0,\ \mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}}$.

e. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $t > 0$,

$$f'(t) = 1 - 2 \times \frac{1}{t} = \frac{t-2}{t}.$$

Pour tout $t > 0$, le signe de $f'(t)$ est le signe de $t - 2$ donc f est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$. Ainsi, f atteint son minimum en 2 et ce minimum vaut $\boxed{f(2) = 1 - 2\ln(2)}$.

f. Soit un réel $t > 1$ et un réel $x > 0$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$t^x \geqslant t^{2\lambda} \iff \mathrm{e}^{x\ln(t)} \geqslant \mathrm{e}^{2\lambda \ln(t)} \iff x\ln(t) \geqslant 2\lambda \ln(t).$$

Or, comme $t > 1$, $\ln(t) > 0$ donc

$$\boxed{t^x \geqslant t^{2\lambda} \iff x \geqslant 2\lambda}.$$

g. En appliquant ce qui précède avec $t = 2 > 1$, on obtient que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \iff 2^x \geqslant 2^{2\lambda}$$

Comme X est à valeurs positives, on en déduit que $\{X \geqslant 2\lambda\} = \{2^X \geqslant 2^{2\lambda}\}$ donc $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathbf{P}(2^X \geqslant 2^{2\lambda})$. Dès lors, d'après la question **2.d.**, $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda f(2)}$ i.e.

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(1-2\ln(2))}.$$

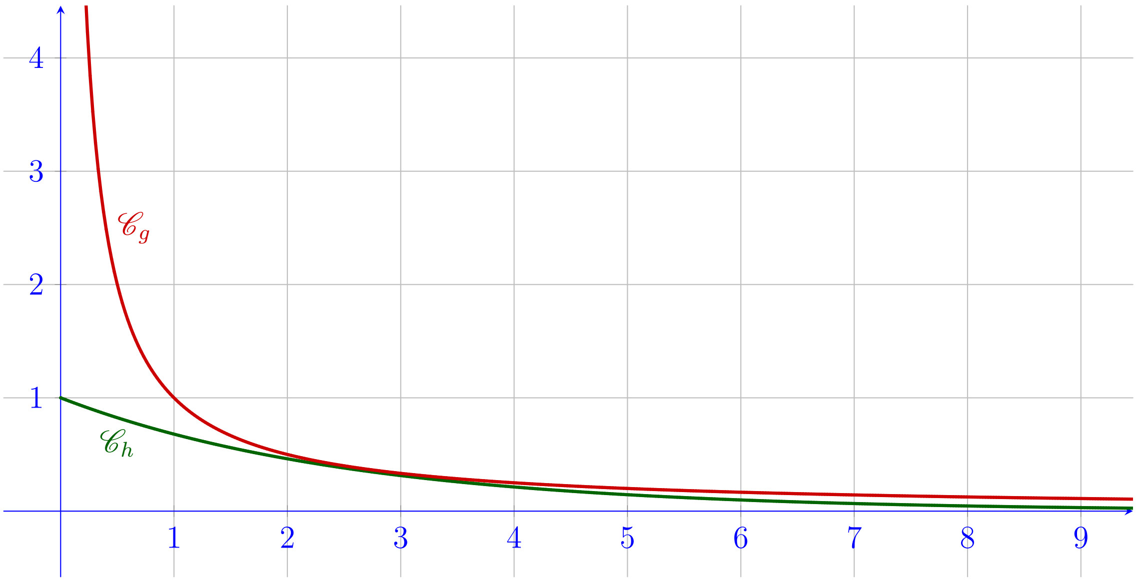
Or,

$$\mathrm{e}^{\lambda(1-2\ln(2))} = \mathrm{e}^{\lambda(1-\ln(4))} = \left(\mathrm{e}^{1-\ln(4)}\right)^{\lambda} = \left(\frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^{\ln(4)}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}}.$$

3. À l'aide de GeoGebra, on obtient les courbes suivantes pour les fonctions $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $h : x \longmapsto \left(\dfrac{e}{4}\right)^x$ définies sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_h$, on en déduit que, quelle que soit la valeur de λ, la seconde inégalité fournit une meilleure majoration que la première.



4
3
2
1
$\mathscr{C}_g$
$\mathscr{C}_h$
1
2
3
4
5
6
7
8
9

⧫ Sujet 13

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. **a.** Donner l'ensemble de définition de f.

   b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

   c. Calculer f' et f'' sur $]0\,;+\infty[$.

   d. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

   e. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$ que l'on déterminera.

2. On considère la fonction F définie sur $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

   a. Calculer, pour tout $(x, y) \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

   b. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que si $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$ alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$

   c. En déduire les points critiques de F.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b. Étudier les variations de (u_n).

   c. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

   d. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.

Solution.

1. **a.** Par définition, $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}_+}$.

b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions continues. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ donc, par différence, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$ donc f est également continue en 0. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

c. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions deux fois dérivables et, pour tout réel $t > 0$,

$$f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t}\right) \quad \textbf{i.e.} \quad \boxed{f'(t) = 2t - \ln(t) - 1}$$

et

$$\boxed{f''(t) = 2 - \frac{1}{t}}.$$

d. Pour tout réel $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t-1}{t}$ est du signe de $2t-1$ donc $f''(t) \leqslant 0$ si $t \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $f''(t) \geqslant 0$ si $t \in \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Ainsi, f' est décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. On en déduit que f' atteint son minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum vaut

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 + \ln(2) - 1 = \ln(2) > 0$$

donc $f'(t) > 0$ pour tout réel $t > 0$.

On conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

e. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(1) = 1^2 - 1\ln(1) = 1$ donc 1 est l'unique antécédent de 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Autrement dit, $\boxed{1 \text{ est l'unique solution de l'équation } f(t) = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2. **a.** Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x}}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}.$$

b. Supposons que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$. Alors, $\dfrac{x}{y} = \ln(x)$ et $\dfrac{y}{x} = \ln(y)$ donc

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\left[\ln(x) - \ln(y)\right] = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}\left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right] = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} + 1$$

i.e. $\boxed{f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1}$.

c. La question précédente assure que si $(x, y) \in U$ est un point critique de F alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$ donc, d'après les résultats de la question **1.**, $\dfrac{x}{y} = 1$ i.e. $y = x$.

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors $(a, a) \in U$. De plus, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \ln(a) - \dfrac{a}{a} = \ln(a) - 1$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,a) = \dfrac{a}{a} - \ln(a) = 1 - \ln(a)$ donc (a, a) est un point critique de F si et seulement si $\ln(a) = 1$ i.e. $a = e$.

On conclut que $\boxed{\text{l'unique point critique de } F \text{ est } (e, e)}$.

3. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. Comme $u_0 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$. Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}6$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$ et on a vu que $f(1) = 1$. Ainsi, $\frac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$ i.e. $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1}.$$

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

Initialisation. Comme $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}6$, $u_0 \leqslant u_1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $\frac{1}{2}u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

c. Ainsi, (u_n) est croissante et bornée par $\frac{1}{2}$ et 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = f(\ell)$. Ainsi, $\ell = \ell^2 - \ell\ln(\ell)$ donc, comme $\ell \neq 0$, $\ell = 1 - \ln(\ell)$ i.e. $g(\ell) = 0$ où $g : x \longmapsto x - 1 + \ln(x)$. Or, $g(1) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, g est injective donc 1 est l'unique solution de $g(x) = 0$. Ainsi, on conclut que $\ell = 1$ i.e.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

d. La fonction suivante répond à la question car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$ donc $|u_n - 1| = 1 - u_n$. (Rappel : en Python, la fonction ln est disponible dans le module `math` sous la nom `log`.)

```
from math import *

def seuil():
  n = 0
  u = 1/2
  while 1-u > 10**(-4):
    n += 1
    u = u**2 - u*log(u)
  return n
```

On trouve $\boxed{n = 19994}$.

⧫ Sujet 14

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que (u_n) est bien définie et strictement positive.

3. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```python
def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u
```

Utiliser cette fonction pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) ainsi que celui de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Étudier les variations de (u_n).

5. Montrer que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n).

6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$.

7. On pose, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2).$$

b. En déduire la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c. À l'aide de la courbe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1.$$

d. Déduire des questions précédentes un encadrement de u_n valable pour tout entier $n \geqslant 3$ puis donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. $u_1 = 1 + \dfrac{1}{1}$ donc $\boxed{u_1 = 2}$ et $u_2 = 2 + \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{5}{2}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n > 0$ donc u_n et $\dfrac{1}{u_n}$ existent et ainsi u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, $\dfrac{1}{u_n} > 0$ donc, par somme, $u_{n+1} > 0$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et strictement positive}}$.

3. L'appel `mystere(n)` renvoie la valeur de u_n pour un entier naturel n passé en argument. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et diverge très lentement vers $+\infty$ (par exemple, $u_{100} \approx 14$, $u_{1000} \approx 45$ et $u_{10^6} \approx 1414$).

On peut modifier la fonction `mystere` afin qu'elle affiche les valeurs de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ de la manière suivante :

```
from math import sqrt

def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u/sqrt(2*n)
```

On peut conjecturer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)$ est décroissante et converge vers 1 (par exemple, $\dfrac{u_{100}}{\sqrt{2 \times 100}} \approx 1{,}01$, $\dfrac{u_{1000}}{\sqrt{2 \times 1000}} \approx 1{,}001$ et $\dfrac{u_{10^6}}{\sqrt{2 \times 10^6}} \approx 1{,}000002$).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ car $u_n > 0$ donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

5. Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ. Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par $u_0 = 1$ donc $\ell \geqslant 1$. En particulier, $\ell \neq 0$. Dès lors, $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$ donc, par somme, $u_n + \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell + \dfrac{1}{\ell}$. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell + \dfrac{1}{\ell}$. Or, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ i.e. $\dfrac{1}{\ell} = 0$. C'est absurde donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge}}$.

Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou tend vers $+\infty$. Mais, on vient de voir que (u_n) diverge donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

6. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$ ».

Initialisation. Comme $u_1^2 = 2^2 = 4$ et $2(1-1) = 0$, $u_1^2 \geqslant 2(1-1)$ i.e. $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$ donc

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geqslant 2(n-1) + 2 = 2n$$

car $\dfrac{1}{u_n^2} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n^2 \geqslant 2(n-1)}.$$

7. a. Soit un entier $n \geqslant 3$. On remarque, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{u_k}$. De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, d'après la question précédente, $u_k^2 \geqslant 2(k-1)$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{u_k^2} \geqslant \sqrt{2(k-1)}$ i.e., comme $u_k > 0$, $u_k \geqslant \sqrt{2(k-1)}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2(k-1)}}$ i.e. $u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2(k-1)}}$.

Ainsi, en sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1} - u_k \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2(k-1)}}.$$

Or, par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_2$ et, par linéarité et changement d'indice,

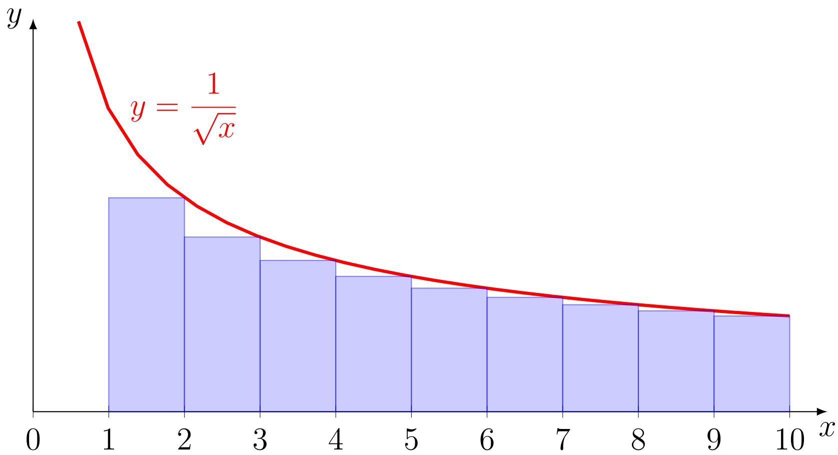
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_n.$$

Ainsi, $u_n - u_2 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} S_n$ donc $\boxed{S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2)}$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\sqrt{2} > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}(u_n - u_2) = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Par suite, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

c. Soit un entier $n \geqslant 3$. Pour tout entier entier $k \geqslant 2$, on peut interpréter le nombre $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ comme l'aire du rectangle de hauteur $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ construit sur le segment $[k-1\,;k]$.



Comme ces rectangles sont entièrement situés en dessous de la courbe de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n-2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n-2} = 2\sqrt{n-2} - 2.$$

Dès lors,

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + 2\sqrt{n-2} - 2$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1}.$$

d. D'une part, on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{2(n-1)}$. D'autre part, on a vu que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2)$ donc, comme $\sqrt{2} > 0$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} S_n + u_2$. On déduit alors de la question précédente que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{n-2} - 1\right) + \frac{5}{2} = \sqrt{2}\sqrt{n-2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \leqslant \sqrt{2(n-2)} + 2.$$

car $\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}8 \leqslant 2$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ \sqrt{2(n-1)} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2(n-2)} + 2}$.

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sqrt{2n\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n\left(1 - \frac{2}{n}\right)} + 2$$

donc

$$\sqrt{2n}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + 2$$

i.e. comme $\sqrt{2n} > 0$,

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leqslant \sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \frac{2}{\sqrt{2n}}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ donc, par continuité de la racine carrée en 1, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{n}} = \sqrt{1} = 1$. De plus, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n} = +\infty$ donc, par quotient, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{2n}} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} = 1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$. Ainsi, par définition, $\boxed{u_n \sim \sqrt{2n}}$.

♦ Sujet 15

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.

Partie A. Tirage sans remise
Dans cette partie, on effectue des tirages sans remise.
On note X_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. Donner $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.
2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
4. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.
5. On définit la variable aléatoire $Y = 6 - X_2$.
   Montrer que Y a la même loi que X_1.
6. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.
7. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X_2)$.

Partie B. Tirage avec remise
Dans cette partie, on effectue des tirages avec remise.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et Y_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. On considère le programme suivant, écrit en langage Python.

```python
from random import *

p = 2/5
nb_tirages = 1
while random() > p:
  nb_tirages += 1
print(nb_tirages)
```

   Que renvoie ce programme ?
2. Donner la loi de Y_1, son espérance et sa variance.
3. Donner $Y_2(\Omega)$.
4. Déterminer la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2).
5. En déduire la loi de Y_2.
6. On définit la variable aléatoire $Z = Y_2 - Y_1$.
   Montrer que Z a la même loi que Y_1.
7. Donner une relation entre $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.
8. En déduire l'espérance de Y_2.

Solution.

Partie A. Tirage sans remise

1. Comme il n'y a pas remise, $X_1(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $X_2(\Omega) = [\![2,5]\!]$.

2. Comme $X_1 < X_2$, $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) = \varnothing$ donc, $\mathbf{P}((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = 0$. Or, par la formule de probabilités composées, $\mathbf{P}(X_1 = 2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$ et $\mathbf{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$ donc $\mathbf{P}(X_1 = 2)\mathbf{P}(X_2 = 2) \neq 0$. Ainsi, $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3. Comme on l'a dit, si $i \geqslant j$, $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = 0$.
Ensuite, pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,5]\!]$, la probabilité de l'évènement $(X_1 = i, X_2 = j)$ est la probabilité que, dans une permutation des 5 boules, il y ait une boule noire au i-ème tirage et au j-ième tirage. Or, il y a $5! = 120$ permutations et il y a $2! \times 3! = 12$ façons de répartir les boules pour que la i-ème et la j-ième soient noires. Par équiprobabilité, on en déduit que $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$.
Ainsi, la loi conjointe de (X_1, X_2) est donnée par

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![2,5]\!] \quad \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

4. On peut utiliser une tableau pour déterminer les lois marginales :

X_2 \ X_1	1	2	3	4	Loi de X_2
2	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
Loi de X_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

5. Comme $X_2(\Omega) = [\![2,5]\!]$, $Y(\Omega) = [\![6-5, 6-2]\!] = [\![1,4]\!] = X_1(\Omega)$. De plus, d'après le tableau ci-dessus,

- $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 5) = \dfrac{2}{5} = \mathbf{P}(X_1 = 1)$
- $\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_2 = 4) = \dfrac{3}{10} = \mathbf{P}(X_1 = 2)$
- $\mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 3) = \mathbf{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{5} = \mathbf{P}(X_1 = 3)$
- $\mathbf{P}(Y = 4) = \mathbf{P}(6 - X_2 = 4) = \mathbf{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{10} = \mathbf{P}(X_1 = 4)$

Ainsi, $\boxed{Y \text{ a la même loi de } X_1}$.

6. On en déduit que $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(6 - X_2)$ donc, par linéarité de l'espérance, $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 6 - \mathbf{E}(X_2)}$.

7. Par définition, $\mathbf{E}(X_1) = 1 \times \dfrac{2}{5} + 2 \times \dfrac{3}{10} + 3 \times \dfrac{1}{5} + 4 \times \dfrac{1}{10}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X_1) = 2}$. Comme $\mathbf{E}(X_1) = 6 - \mathbf{E}(X_2)$, on en déduit que $\boxed{E(X_2) = 4}$.

Partie B. Tirage avec remise

1. Ce programme simule la variable aléatoire Y_1 i.e. il renvoie le nombre (aléatoire) de tirages nécessaire pour obtenir la première boule noire.

2. La variable Y_1 donne le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli (puisqu'il y remise) donc $\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{5}\right)}$. Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(Y_1) = \frac{5}{2}}$ et $\mathbf{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{2}{5}}{(\frac{2}{5})^2} = \frac{3}{5} \times \frac{25}{4}$ donc $\boxed{\mathbf{V}(Y_1) = \frac{15}{4}}$.

3. La deuxième boule noire arrive au minimum au deuxième tirage donc $\boxed{Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}}$.

4. Comme précédemment, si $(i,j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)$ est un couple tel que $i \geqslant j$ alors $\mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0$.
Soit $(i,j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)$ est tel que $i < j$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k : « obtenir une boule noire au k-ième tirage ». Alors,

$$(Y_1 = i, Y_2 = j) = \overline{N_1} \cap \cdots \cap \overline{N_{i-1}} \cap N_i \cap \overline{N_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{N_{j-1}} \cap N_j$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{j-i-1} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1+j-i-1} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}.$$

Ainsi, la loi conjointe de (Y_1, y_2) est donnée par

$$\boxed{\forall (i,j) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega) \quad \mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \begin{cases} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

5. Comme $(Y_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, on déduit de la formule de probabilités totales que

$$\forall j \in Y_2(\Omega) \quad \mathbf{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_1 = i, Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2} = (j-1) \times \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}$$

car les termes sommées ne dépendent pas de i.
Ainsi, la loi de Y_2 est donnée par :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\} \quad \mathbf{P}(Y_2 = j) = \frac{4(j-1)}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{j-2}}.$$

6. Comme $Y_1(\Omega) = N^*$ et $Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\,;1\}$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, comme $(Y_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, on déduit de la formule de probabilités totales que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k, Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 - Y_1 = k, Y_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 - i = k, Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_2 = i + k, Y_1 = i) \\
&\underset{i+k>i}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{i+k-2} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{i} \\
&\underset{p=i-1}{=} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{p+1} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} \times \frac{3}{5} \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{p} \\
&\underset{0 \leqslant \frac{3}{5} < 1}{=} \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

soit finalement $\mathbf{P}(Z=k)=\dfrac{2}{5}\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}$ i.e. $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{Z \text{ a la même loi que } Y_1}$.

7. On en déduit que $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y_2 - Y_1)$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2) - \mathbf{E}(Y_2)$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(Y_2) = 2\mathbf{E}(Y_1)}$.

8. On conclut donc que $\mathbf{E}(Y_2) = 2 \times \dfrac{5}{2}$ i.e $\boxed{\mathbf{E}(Y_2) = 5}$.

⧫ Sujet 16

Partie 1. Étude d'une fonction d'une variable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est impaire.

2. Dresser le tableau de variations complet de f.

3. La fonction f admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}^*$?

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

5. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right)$$

Démontrer que $\mathscr{C}$ possède en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

Partie 2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases} .$$

1. Calculer les premières valeurs de la suite (u_n), à la main ou avec un logiciel de votre choix.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n), ainsi que sa limite éventuelle.

2. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. En ayant recours à la fonction f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

1. Donner les deux dérivées partielles de g.

2. En quels points la fonction g peut-elle admettre un extremum local ?

3. **a.** Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$g(x,y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

b. En déduire que g présente un extremum local en $(1,1)$.

4. Démontrer que la fonction g ne présente pas d'extremum local en $(-1,-1)$.

Solution.

Partie 1

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0 et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{1}{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x \neq 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in]-\infty\,; -1] \cup [1\,; +\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in [-1\,; 0[\cup]0\,; +\infty]$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau, $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est asymptote verticale à } \mathscr{C}}$. En revanche, $\mathscr{C}$ ne possède pas d'asymptote horizontale.

4. On en déduit que la fonction f ne possède pas d'extremums globaux sur $\mathbb{R}^*$. En revanche, elle possède deux extremums locaux : $\boxed{\text{un maximum local égal à } 0 \text{ atteint en } -1}$ et $\boxed{\text{un maximum local égale à } 1 \text{ atteint en } 1}$.

5. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$ donc $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc, par définition, $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty}$.

Partie 2.

1. On calcule les premières valeurs de (u_n) à l'aide de la fonction Python suivante :

```
def suite(n):
  u = 2
  for i in range(n):
    u = 1/2*(u + 1/u)
  return u
```

On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et converge (très vite !) vers 1.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et $u_0 = 2 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n > 0$ donc u_n et $\dfrac{1}{u_n}$ existent et ainsi u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, $\dfrac{1}{u_n} > 0$ donc, par somme, $u_{n+1} > 0$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et strictement positive}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $u_n = 2 \geqslant 1$. Sinon, $n > 0$ donc $u_n = f(u_{n-1})$. Or d'après la question précédente, $u_{n-1} > 0$ et, d'après la **Partie 1.**, sur $]0\,;+\infty[$, f est minorée par 1 donc $f(u_{n-1}) \geqslant 1$. Ainsi, $u_n \geqslant 1$.

Le résultat est montré dans tous les cas donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{1 - u_n}{2u_n} \leqslant 0$$

car $u_n \geqslant 1$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

5. Comme (u_n) est décroissante et minorée par 1, (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$ d'après le théorème de la limite monotone. Alors, $\ell \neq 0$ donc $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$ donc, par somme de limites, $u_n + \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \dfrac{1}{\ell}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{1}{\ell}\right)$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{1}{\ell}\right)$ i.e. $2\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ donc $\ell = \dfrac{1}{\ell}$ et finalement $\ell^2 = 1$. Comme $\ell > 0$, on conclut que $\ell = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

Partie 3.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)\left[-\frac{1}{x^2}(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 1\right] = \frac{1}{2}(1+y)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

donc

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(1+y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right)}.$$

Les variables x et y ayant un rôle symétrique, on a de même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(1+x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)}.$$

2. Si f admet un extremum local en $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ alors (x, y) est un point critique de f.

Or,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1+y)\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x^2}\right)=0 \\ \dfrac{1}{2}(1+x)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+y=0 \text{ ou } \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x^2}=0 \\ 1+x=0 \text{ ou } \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \text{ ou } y=x^2 \\ x=-1 \text{ ou } x=y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$$

Or, comme $x \neq 0$,

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x^2 \\ x=x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 1=x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de g sont $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(1,1)$.

Dès lors, $\boxed{g \text{ ne peut présenter un extremum local qu'en } (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1) \text{ et } (1,1)}$.

3. a. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+y+x+xy) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x}+1+y+\frac{1}{y}+1+\frac{x}{y}+x\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{g(x,y)=1+f(x)+f(y)+f(\frac{x}{y})}$.

b. On a vu dans la **Partie 1.** que, pour tout réel $x>0$, $f(x) \geqslant 1$ donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 1$, $f(y) \geqslant 1$ et $f(\frac{x}{y}) \geqslant 1$ de sorte que $g(x,y) \geqslant 4$. Or, $g(1,1) = \dfrac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1) = 4$ donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x,y) \geqslant g(1,1)$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ présente un minimum local en } (1,1)}$.

4. L'image de $(-1,-1)$ par g est $g(-1,-1)=0$. Soit h un réel appartenant à $]-1\,;1[$ de sorte que $-1+h<0$ et $-1-h<0$. Alors,

$$g(-1+h,-1+h) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1+h}+\frac{1}{-1+h}\right)(1-1+h)(1-1+h) = \frac{h^2}{-1+h} < 0$$

car $h^2>0$ et $-1+h<0$ et

$$\begin{aligned} g(-1+h,-1-h) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1+h}+\frac{1}{-1-h}\right)(1-1+h)(1-1-h) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1-h)+(-1+h)}{(-1+h)(-1-h)}(-h^2) = \frac{h^2}{1-h^2} > 0 \end{aligned}$$

car $|h|<1$ donc $1-h^2>0$.

Ainsi, dans tout voisinage de $(-1,-1)$, il existe des points (a,b) tels que $g(a,b) < g(-1,-1)$ et des points (a,b) tels que $g(a,b) > g(-1,-1)$ donc $\underline{g \text{ ne présente pas d'extremum local en } (-1,-1)}$.

Remarque On a $g(1,-1) = g(-1,1) = 0$. De plus, si $h \in \left]-1\,;1\right[$ de sorte que $-1+h<0$ alors

$$g(1,-1+h) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{-1+h}\right) \times 2 \times (1-1+h) = \frac{-1+h+1}{-1+h} \times h = \frac{h}{-1+h}$$

qui est du signe opposé de h car $-1+h<0$ donc dans tout voisinage de $(1,-1)$, il existe des points dont les images sont supérieures à $g(1,-1)$ et des points dont les images sont inférieures à $g(1,-1)$. Ainsi, g ne présente pas d'extremum en $(-1,1)$. En échangeant le rôle de x et y, on conclut de même que g ne présente pas d'extremum en $(1,-1)$. Ainsi, le seul extremum de g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est 4 atteint en $(1,1)$.

⧫ Sujet 17

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un univers noté Ω.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre α et que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

I. Probabilités

1. **a.** Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

b. Donner la loi de Y son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbf{P}\left((X=0)\cup(Y=0)\right)$.

3. Montrer que $(X=Y)=\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}((X=k)\cap(Y=k))$.

Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

II. Matrices

1. Soit deux réels positifs ou nuls a et b et $M=\begin{pmatrix}-a & a & 0\\ 2a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de M en fonction de a et b.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M possède 3 valeurs propres distinctes.

2. Pour tout $\omega\in\Omega$, on note $M(\omega)=\begin{pmatrix}-X(\omega) & X(\omega) & 0\\ 2X(\omega) & 0 & 0\\ 0 & 0 & Y(\omega)\end{pmatrix}$ où X et Y sont les variables aléatoires de la partie I.

a. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit nulle.

b. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit inversible.

c. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ possède trois valeurs propres distinctes.

Solution.

I. Probabilités

1. **a.** Par définition, $\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et, pour tout } k\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}(X=k)=\dfrac{\alpha^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

   De plus, par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X)=\mathbf{V}(X)=\alpha}$.

   b. Par définition, $(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ donc $\boxed{Y(\Omega)=\mathbb{N}}$ et, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y=k)=\mathbf{P}(Y+1=k+1)$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}(Y=k)=p(1-p)^k}$.

   De plus, par théorème, $\mathbf{E}(Y+1)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(Y+1)=\dfrac{1-p}{p^2}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(Y+1-1)=\mathbf{E}(Y+1)-1$ soit $\boxed{\mathbf{E}(Y)=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{1-p}{p}}$ et, par propriété de la variance, $\mathbf{V}(Y)=\mathbf{V}(Y+1-1)=\mathbf{V}(Y+1)$ soit $\boxed{\mathbf{V}(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}}$.

2. Par propriété, $\mathbf{P}\left((X=0)\cup(Y=0)\right)=\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(Y=0)-\mathbf{P}\left((X=0)\cap(Y=0)\right)$.
   Or, $\mathbf{P}(X=0)=\dfrac{\alpha^0}{0!}\mathrm{e}^{-\alpha}=\mathrm{e}^{-\alpha}$, $\mathbf{P}(Y=0)=p(1-p)^0=p$ et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}\left((X=0)\cap(Y=0)\right)=\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0)=\mathrm{e}^{-\alpha}\times p$$

   donc $\boxed{\mathbf{P}\left((X=0)\cup(Y=0)\right)=\mathrm{e}^{-\alpha}+p-p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

3. La famille $((X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned}(X=Y)&=(X=Y)\cap\Omega=(X=Y)\cap\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=k)\right)\\&=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=Y)\cap(X=k)\right)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((k=Y)\cap(X=k)\right)\end{aligned}$$

   et ainsi $\boxed{(X=Y)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=k)\cap(Y=k)\right)}$.
   Comme il s'agit d'une union d'évèments incompatibles (puisque les évènements $(X=k)$ sont incompatibles pour $k\in\mathbb{N}$), il s'ensuit que

$$\mathbf{P}(X=Y)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left((X=k)\cap(Y=k)\right)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left((X=k)\cap(Y=k)\right).$$

   Or, Xet Y sont indépendantes donc

$$\mathbf{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha}\times p(1-p)^k=p\mathrm{e}^{-\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\alpha)^k}{k!}.$$

   donc, en reconnaissant la somme d'une série géométrique, $\mathbf{P}(X=Y)=p\mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{e}^{(1-p)\alpha}$ i.e.

$$\boxed{\mathbf{P}(X=Y)=p\mathrm{e}^{-p\alpha}}.$$

II. Matrices

a. i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -ax + ay = \lambda x \\ 2ax = \lambda y \\ bz = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} -(a+\lambda)x + ay = 0 \\ 2ax - \lambda y = 0 \\ (b-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

<u>1^{re} cas</u>. Supposons que $a = 0$. Alors, le système s'écrit

$$\begin{cases} -\lambda x = 0 \\ -\lambda y = 0 \\ (b-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

donc il n'est pas de rang 3 si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = b$.
<u>2^{e} cas</u>. Supposons que $a \neq 0$. Alors,

$$\begin{cases} -(a+\lambda)x + ay = 0 & L_1 \\ 2ax - \lambda y = 0 & L_2 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2ax - \lambda y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -(a+\lambda)x + ay = 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2ax - \lambda y = 0 & L_1 \\ \left(a - \dfrac{\lambda(a+\lambda)}{2a}\right) y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{a+\lambda}{2a} L_1 \\ (b-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, le système n'est pas de rang 3 si et seulement si $a - \dfrac{\lambda(a+\lambda)}{2a} = 0$ ou $b - \lambda = 0$ i.e. $\lambda = b$. Or,

$$a - \frac{\lambda(a+\lambda)}{2a} = 0 \iff 2a^2 - \lambda(a+\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + a\lambda - 2a^2 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 + aX - 2a^2$ est $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times (-2a) = 9a^2 > 0$ (car $a \neq 0$) donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-a - |3a|}{2} = -2a \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-a + \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-a + |3a|}{2} = a$$

car $a > 0$.
Dans ce cas, les valeurs propres de M sont donc $-2a$, a et b.
On conclut que $\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{0\,;b\} \text{ si } a = 0 \text{ et } \operatorname{Sp}(M) = \{-2a\,;a\,;b\} \text{ si } a > 0}$.

b. La matrice M est inversible si et seulement si a n'est pas valeur propre de M i.e. si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
On conclut que $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0}$.

c. Si $a = 0$, M possède au plus 2 valeurs propres. Si $a > 0$ alors $-2a \neq 0$ donc M possède 3 valeurs propres distincts si et seulement si $b \neq -2a$ et $b \neq a$. Or, dans ce cas, $-2a < 0$ et $b \geqslant 0$ donc $-2a \neq b$. Ainsi, M possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si $a \neq b$.
On conclut donc que $\boxed{M \text{ possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si } a \notin \{0\,;b\}}$.

4. **a.** La matrice $M(\omega)$ est nulle si et seulement si $X(\omega) = 0$ et $Y(\omega) = 0$. Or, on a vu dans la question **I.2.** que $\mathbf{P}((X = 0 \cap (Y = 0)) = p\mathrm{e}^{-\alpha}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que la matrice } M(\omega) \text{ soit nulle est } p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

b. D'après les résultats de la question **1.**, $M(\omega)$ est inversible si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) \neq 0$. Or, $(X \neq 0) \cap (Y \neq 0) = \overline{(X = 0) \cup (Y = 0)}$ donc, d'après les résultats de la première partie, $\boxed{\text{la probabilité que } M(\omega) \text{ soit inversible est } 1 - \mathrm{e}^{-\alpha} - p + p\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

c. D'après les résultats de la question **1.**, $M(\omega)$ possède 3 valeurs propres distinctes si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $X(\omega) \neq Y(\Omega)$. Or, $(X \neq 0) \cap (X \neq Y) = \overline{(X = 0) \cup (X = Y)}$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left((X = 0) \cup (X = Y)\right) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = Y) - \mathbf{P}\left((X = 0) \cap (X = Y)\right) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = Y) - \mathbf{P}\left((X = 0) \cap (Y = 0).\right)\end{aligned}$$

donc, d'après les résultats de la première partie,

$$\mathbf{P}\left((X = 0) \cup (X = Y)\right) = \mathrm{e}^{-\alpha} + p\mathrm{e}^{-p\alpha} - p\mathrm{e}^{-\alpha}$$

on conclut donc que la probabilité que $M(\omega)$ possède 3 valeurs propres distinctes est

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{-\alpha} - p\mathrm{e}^{-p\alpha} + p\mathrm{e}^{-\alpha}}.$$

⧫ Sujet 18

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exprimer, pour tout $n\vec{n}\mathbb{N}$, S_n sous la forme d'une intégrale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Encadrer la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. À l'aide des questions précédentes, montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{3}{2}\ln(2)$.

6. a. Écrire en Python une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui renvoie la valeur de S_n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 1,0397$.

Solution.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}}{2k+1} - \frac{0^{2k+1}}{2k+1}$$

i.e. $\boxed{\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \times \frac{1}{3} \times 3 = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$$

donc, d'après la question précédente,

$$S_n = 3\sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{n} t^{2k}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (t^2)^k = \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

3. a. Soit $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$. Alors, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{1}{9}$. Ainsi, $-\frac{1}{9} \leqslant -t^2 \leqslant 0$ donc $\frac{8}{9} \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right],\ 1 \leqslant \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, en multipliant l'inégalité précédente par $t^{2n+2} \geqslant 0$, il vient

$$t^{2n+2} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \leqslant \frac{9}{8}t^{2n+2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{8}t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \frac{9}{8}\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t$$

D'après le résultat de la question 1,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$.

Par le théorème d'encadrement, on conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

4. **a.** Soit a et b deux réels. Alors, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$,

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t)+b(1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{(a-b)t+a+b}{1-t^2}$$

donc, pour que l'égalité voulue soit réalisée, il suffit que $a-b=0$ et $a+b=1$ i.e. $a=b$ et $2a=1$ soit $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right],\ \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t}}$.

b. Par linéarité de l'intégrale, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

soit, finalement,

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2)}.$$

5. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 3\times\frac{1}{2}\ln(2) - 3I_n.$$

Or, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. Comme (S_n) est la suite de somme partielle associée à la série $\sum u_n$, on en déduit que la série $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente et } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}\ln(2)}$.

6. **a.** La fonction suivant convient.

```
def somme(n):
  S = 0
  for k in range(n+1):
    S += 1/(2*k+1)*(1/3)**(2*k)
  return S
```

7. On peut adapter la fonction précédente de la manière suivante.

```
def seuil():
  S = 1
  n = 0
  while S <= 1.0397:
    n += 1
    S += 1/(2*n+1)*(1/3)**(2*n)
  return n
```

On obtient $\boxed{n = 3}$ (ce qui illustre une convergence très rapide de la série).

⧫ Sujet 19

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : une variable aléatoire X est une variable à densité si et seulement si sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. De plus, dans ce cas, on peut obtenir une densité de X en dérivant la fonction F en tout point où elle est dérivable et en lui donnant la valeur arbitraire 0 en tout point où F n'est pas dérivable.

Soit un nombre réel $\lambda > 0$.

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a. Donner une densité de Z, notée f_Z, ainsi que son espérance (sous la forme d'une intégrale, puis donner sa valeur sans calcul).

b. Donner le moment d'ordre 2 de Z, c'est-à-dire $\mathbf{E}(Z^2)$.

2. Soit f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

3. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes T_1 et T_2 admettant toutes deux la fonction f comme densité de probabilité.

a. Déterminer leur fonction de répartition F.

b. Montrer que T_1 et T_2 admettent une espérance et la calculer.

On considère différents systèmes de montage de panneaux solaires. On se limite aux systèmes comportant deux panneaux. On admet que T_1 modélise la durée du vie du premier panneau et T_2 la durée de vie du second.

4. Le premier système, noté S, tombe en panne lorsque l'un de ses deux éléments tombe en panne. On dit que le système S est monté en série. On note U l'instant où le système S tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(U > k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_U de U puis une densité f_U de U.

5. Le second système, noté S', tombe en panne lorsque ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système S' est monté en parallèle. On note V l'instant où le système S' tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(V \leqslant k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_V de V puis une densité f_V de V.

Solution.

1. a. Par définition, une densité de Z est la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

Comme f_Z est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, l'espérance de Z est

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t}.$$

Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}}$.

b. Soit $A > 0$. Alors,

$$\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \lambda t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \longmapsto 2t$ et $v' : t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A - \int_0^A 2t \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} + 2\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, Comme $\lambda > 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{A \to +\infty} = 0$ et, d'après les résultats de la question **1.**,

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^A t f_Z(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ainsi, par somme de limite, $\int_0^A t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{2}{\lambda^2}$ donc, par le théorème de transfert, Z admet un moment d'ordre 2 et $\boxed{\mathbf{E}(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$.

2. La fonction f est nulle sur $]-\infty\,; 0[$ et continue sur $[0\,; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in]-\infty\,; 0[$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ et, pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, $f(t) = \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$ et exp est à valeurs positives. Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda \int_0^{+\infty} \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \mathbf{E}(Z) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$.

3. a. Soit un réel x. Si $x < 0$ alors

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant x) = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si $x \geqslant 0$ alors

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(T_1 \leqslant x) = \int_0^x \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t \times \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^x t \times \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1 \times (-\mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

donc $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Ainsi, F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

b. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, les variables T_1 et T_2 admettent une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or,

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\mathbf{E}(Z^2).$$

Ainsi, d'après le résultat de la question **1.b.**, cette intégrale converge et vaut $\lambda \times \dfrac{2}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda}$ donc T_1 et T_2 admette une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(T_2) = \dfrac{2}{\lambda}}$.

4. a. L'évènement $(U > k)$ signifie que le système fonctionne au-delà de l'instant k donc que les deux panneaux fonctionnent au-delà de l'instant k.
Ainsi, $\boxed{(U > k) = (T_1 > k) \cap (T_2 > k)}$.

b. Comme les variables aléatoires T_1 et T_2 donc indépendantes, on en déduit que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}(U \leqslant x) = 1 - \mathbf{P}(U > x) = 1 - \mathbf{P}((T_1 > x) \cap (T_2 > x)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_1 > x)\mathbf{P}(T_2 > x) = 1 - (1 - \mathbf{P}(T_1 \leqslant x)\mathbf{P}(T_2 \leqslant x)) \\ &= 1 - (1 - F(x))(1 - F(x)) = 1 - (1 - 2F(x) + F(x)^2) \\ &= 1 - 1 + 2F(x) - F(x)^2 \end{aligned}$$

soit finalement, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_U(x) = 2F(x) - F(x)^2}$.
La fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car F l'est également) donc U est une variable aléatoire à densité f_U et, pour tout $t \neq 0$, $f_U(t) = F_U'(t)$.
Ainsi, pour tout réel $t < 0$, $f_U(t) = 2F'(t) - 2F'(t)F(t) = 0$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} f_U(t) &= 2F'(t) - 2F'(t)F(t) = 2f(t) - 2f(t)F(t) \\ &= 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} - 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\ &= 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\ &= 2\lambda^2 t(1 + \lambda t)\mathrm{e}^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

Ainsi, une densité f_U de U est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda^2 t(1 + \lambda t)\mathrm{e}^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

5. a. L'évènement $(V \leqslant k)$ signifie que le système tombe en panne au plus tard à l'instant k donc que les deux panneaux fonctionnent sont en panne à l'instant k.
Ainsi, $\boxed{(V \leqslant k) = (T_1 \leqslant k) \cap (T_2 >\leqslant k)}$.

b. Comme les variables aléatoires T_1 et T_2 donc indépendantes, on en déduit que, pour tout réel x,

$$F_V(x) = \mathbf{P}(V \leqslant x) = \mathbf{P}((T_1 \leqslant x) \cap (T_2 \leqslant x))$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_V(x) = F(x)^2}$.

La fonction F_V est continue sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car F l'est également) donc V est une variable aléatoire à densité f_V et, pour tout $t \neq 0$, $f_V(t) = F_V'(t)$.

Ainsi, pour tout réel $t < 0$, $f_V(t) = 2F'(t)F(t) = 0$ et, pour tout $t > 0$,

$$f_V(t) = 2F'(t)F(t) = 2f(t) - 2f(t)F(t) = 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

Ainsi, une densité f_V de V est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}.$$

⧫ Sujet 20

On peut modéliser la masse corporelle d'un rat musqué en fonction de son âge par le modèle de croissance de Gompertz.

Si on note t l'âge (en jours) du rat et $Y(t)$ sa masse (en grammes), on suppose que la fonction Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E)\ Y'(t) = -r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t)$$

avec r et K des réels strictement positifs tels que $0 < Y(0) < K$.

Dans la suite, on note Y une solution de cette équation différentielle et on admet que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < Y(t) < K$.

1. a. Justifier que la fonction $f : y \longmapsto \dfrac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y}$ admet une primitive F sur $]0\,;K[$.

b. Montrer que, pour tout réel t positif, $(F \circ Y)'(t) = 1$.

2. Vérifier que $F : y \longmapsto -\dfrac{1}{r}\ln\left(-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)\right)$ est une primitive de f sur $]0; K[$.

3. a. Déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle C telle que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$-\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$$

b. On pose $y_0 = Y(0)$. Établir que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$.

c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = K\exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$.

4. Étudier les variations de la fonction Y sur $[0\,;+\infty[$. Que représente la constante K ?

5. On considère la fonction Z définie pour tout $t \geqslant 0$ par $Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right)$.

Démontrer que Z est une fonction affine de coefficient directeur $-r$. Préciser son ordonnée à l'origine.

6. *Détermination expérimentale de y_0, K et r*

Le tableau ci-contre contient les valeurs mesurées tous les 20 jours de la masse du rat, de sa naissance à son 301e jour. On note T_i le temps de mesure et M_i la masse mesurée le jour T_i.

a. Proposer des valeurs de y_0 et K.

b. Indiquer comment on pourrait proposer une valeur expérimentale de r.

Temps (j)	Masse (g)
0	16,00
20	116,06
40	304,48
60	486,91
80	611,92
100	683,91
120	721,96
140	741,24
160	750,81
180	755,51
200	757,81
220	758,93
240	759,48
260	759,75
280	759,88
300	759,94

Solution.

1. a. Pour tout $y \in \,]0\,;K[$, $0 < y < K$ donc, comme $K > 0$, $0 < \dfrac{y}{K} < 1$ et ainsi, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{y}{K}\right) < 0$. Comme $r > 0$, il s'ensuit que, pour tout $y \in \,]0\,;K[$, $-r\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)y > 0$ donc $-r\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)y \neq 0$. Ainsi, la fonction f est définie sur $]0\,;K[$. Comme f est une composée de fonctions de référence, elle est continue sur $]0\,;K[$ et donc, par théorème, $\boxed{f \text{ admet une primitive } F \text{ sur }]0\,;K[}$.

b. La fonction $F \circ Y$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) \in \,]0\,;K[$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$(F\circ Y)'(t) = F'(Y(t))Y'(t) = f(Y(t))Y'(t) = \frac{1}{-r\ln(\frac{Y(t)}{K})Y(t)}\left(-r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t)\right) = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*,\ (F\circ Y)'(t) = 1}$.

2. On a vu précédemment que, pour tout $y \in \,]0\,;K[$, $-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right) > 0$ donc F est bien définie sur $]0\,;K[$. De plus, elle est dérivable sur $]0\,;K[$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $y \in \,]0\,;K[$,

$$F'(y) = -\frac{1}{r} \times \frac{-\frac{\frac{1}{K}}{\frac{y}{K}}}{-\ln(\frac{y}{K})} = -\frac{1}{r} \times \frac{\frac{1}{y}}{\ln(\frac{y}{K})} = \frac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y} = f(y).$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;K[}$.

3. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(F\circ Y)'(t) = 1$ donc, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(F\circ Y)(t) = t + C$ i.e. $-\dfrac{1}{r}\ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right) = t + C$. Dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right) = -r(t+C)$ donc $-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$.

On conclut donc qu'$\boxed{\text{il existe } C \in \mathbb{R} \text{ telle que, pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ -\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}}$.

b. On a donc $-\ln\left(\dfrac{Y(0)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-rC}$ i.e. $-\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right) = \mathrm{e}^{-rC}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = -\mathrm{e}^{-r(t+C)} = -\mathrm{e}^{-rC}\mathrm{e}^{-rt} = -\left(-\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\right)\mathrm{e}^{-rt}$$

donc,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}}.$$

c. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{Y(t)}{K} = \exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$ donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ Y(t) = K\exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]}$.

4. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$Y'(t) = -r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t) = -r\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt} \times K\exp\left[\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$$

donc, comme exp est à valeurs positives, $Y'(t)$ est du signe de $-rL\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)$. Or, par hypothèse, $r > 0$, $K > 0$ et $y_0 = Y(0) \in \left]0\,;K\right[$ donc, comme on l'a vu précédemment, $\ln\left(\frac{y_0}{K}\right) < 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y'(t) > 0$ donc $\boxed{Y \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

De plus, comme $r > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} -rt = -\infty$ donc, comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-rt} = 0$. Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt} = 0$ donc, par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = K\mathrm{e}^0$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = K}$.

La valeur K représente donc le poids limite du rat musqué.

5. Remarquons que Z est bien définie pour tout $t \geqslant 0$ on a vu précédemment que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $-\ln\left(\frac{y}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)} > 0$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$ donc

$$Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\frac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right) = \ln\left(\ln\left(\frac{K}{y_0}\right)\right) + \ln(\mathrm{e}^{-rt}) = -rt + \ln\left(\ln\left(\frac{K}{y_0}\right)\right)$$

donc $\boxed{Z \text{ est bien une fonction affine de coefficient directeur } -r}$. De plus, il suit de l'égalité précédente que $\boxed{\text{son ordonnée à l'origine est } \ln\left(\ln\left(\frac{K}{y_0}\right)\right)}$.

6. a. D'après le tableau, $Y(0) = 16$ donc $\boxed{y_0 = 16}$ et Y semble se stabiliser autour de 760 donc $\boxed{K = 760}$.

b. On en déduit que $Z(0) = \ln\left(-\ln\left(\frac{16}{760}\right)\right) \approx 1{,}35$ et $Z(100) = \ln\left(-\ln\left(\frac{683{,}91}{760}\right)\right) \approx -2{,}25$ donc $-r \approx \dfrac{-2{,}25 - 1{,}35}{100 - 0}$ soit $\boxed{r \approx 0{,}036}$.