⧫ Sujet 1

Une particule se déplace entre trois points A, B et C. On ne connaît pas sa position initiale. Lorsque la particule est située en :

- A, elle va en B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et en C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- B, elle va en A avec une probabilité $\frac{3}{4}$ et en C avec une proba $\frac{1}{4}$;
- C, elle va en B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que la particule soit en A, en B et en C après n déplacements.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases}.$$

2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer M en fonction de A.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

6. En déduire les valeurs propres de M, en utilisant la relation de la question **3.**.

7. Justifier qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

8. On note, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = D^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

⧫ Sujet 2

Un éleveur possède 100 lapins qui doivent se faire tatouer. Il choisit successivement des lapins au hasard : si le lapin est tatoué, on le repose dans le clapier ; sinon, on le tatoue et on le repose dans le clapier. On continue ainsi jusqu'à avoir tatoué tous les lapins.

On modélise la situation en assimilant chaque lapin à un jeton et le clapier à une urne, dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tatouer tous les lapins.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de tirages effectués, une fois qu'on a tiré $n-1$ jetons différents, pour obtenir un n-ème jeton différent des précédents. Par exemple, si les tirages donnent :

$$3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 4, \ldots$$

alors $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3$, etc

Première partie

1. Donner la loi de X_1, ainsi que son espérance.

2. Donner la loi de X_2, ainsi que son espérance.

3. Soit un entier $n \in [\![1, 100]\!]$. Donner la loi de X_n, ainsi que son espérance.

4. Calculer l'espérance de X. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Deuxième partie

1. Vérifier que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{100} \frac{100}{j}.$$

2. Soit $j \in [\![2, 100]\!]$. Montrer que

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que

$$\int_1^{101} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \int_1^{100} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

puis donner un encadrement de $\mathbf{E}(X)$ à l'aide de la fonction ln.

Troisième partie

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{100} sont indépendantes.

1. Exprimer $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$, …, $\mathbf{V}(X_n)$.

2. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{V}(X)$. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

⧫ Sujet 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux suites réelles. On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}.$$

On se propose de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n grâce à deux méthodes différentes.

Méthode 1 : à l'aide des nombres complexes

On pose, pour tout entier naturel n,

$$z_n = u_n + \mathrm{i}v_n.$$

1. Écrire un script en Python qui affiche u_n et v_n pour n allant de 0 à 5.
2. Placer les points M_n d'affixes z_n pour n allant de 0 à 5. Expliquer comment évolue $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, z_{n+1} en fonction de z_n.
4. Déterminer une forme exponentielle de $1 - \mathrm{i}$.
5. Donner le terme général de la suite (z_n).
6. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Méthode 2 : à l'aide des matrices

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer une inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Ces matrices seront à coefficients complexes.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

⧫ Sujet 4

Lors d'un jeu télévisé, 400 ampoules sont allumées dans une pièce.

Un candidat ouvre la porte de la pièce, à l'instant x de son choix ($x \in \mathbb{R}^+$).

Le gain du candidat est égal au nombre d'ampoules encore allumées lorsqu'il ouvre la porte, multiplié par le temps x.

On suppose que les durées de vie des ampoules sont indépendantes les unes des autres, et que la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On note T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

a. Rappeler la densité de T et son espérance.

b. Calculer la variance de T.

c. Montrer que pour tous réels s et t strictement positifs.

$$\mathbf{P}(T > s+t \mid T > s) = P(T > t)$$

2. On note A le nombre d'ampoules encore allumées à l'instant x.
Donner la loi de A ainsi que son espérance et sa variance.

3. On note G le gain du candidat.

a. Exprimer G en fonction de x et de A. En déduire $\mathbf{E}(G)$ en fonction de x.

b. Déterminer la valeur x_m de x pour laquelle l'espérance du gain est maximale.

4. Dans cette question, on suppose que $x = x_m$.

a. Justifier que l'on peut approximer la loi de A par une loi normale dont on précisera les paramètres.

b. Dans cette question, la probabilité que le gain dépasse 1000 euros est égale à 0,001.
Déterminer une valeur approchée de λ. *On donne* $\Phi(3{,}0902) \approx 0{,}999$*, où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

⧫ Sujet 5

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' = 5y' - \frac{25}{4}y.$$

Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f : t \longmapsto (at + b)e^{\frac{5}{2}t}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ème de f.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que, pour tout réel t,

$$f^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{5}{2}t}.$$

Dans l'hérédité, on mettra en évidence les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{5}{2}b_n \end{cases}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n et de a.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n b_n$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

de deux manières différentes et en déduire une expression de u_n.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n, a et b.

4. On propose de retrouver le résultat précédent par une méthode matricielle.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - \frac{25}{4}b_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}BX_n$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de B, n et X_0.

d. Montrer que $B = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Exprimer T en fonction de I_2 et de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Calculer N^2 et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, T^n en fonction de n.

g. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de n.

⧫ Sujet 6

Un concessionnaire dispose de 2 voitures qu'il peut louer chaque jour, pour un prix de 30€. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X est le nombre de clients qui veulent lui louer une voiture ;
- Y est le nombre de voitures qu'il loue ;
- G est le chiffre d'affaire qu'il réalise sur la journée.

1. On suppose dans cette question que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

a. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

b. Déterminer l'espérance et la variance de G.

c. Calculer le chiffre d'affaire réalisé en moyenne par le concessionnaire sur 30 jours.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

⧫ Sujet 7

Dans une clinique vétérinaire, on note X le nombre de chats et Y le nombre de chiens présents lors d'une semaine. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu \geqslant 0$.

1. Rappeler la définition de la loi de Poisson.

2. Rappeler l'espérance de X. Démontrer la formule.

3. Rappeler la variance de X. Démontrer la formule.

4. On pose $Z = X + Y$.

a. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

b. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Z.

c. Exprimer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = k)$ en fonction de X et Y.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer et simplifier l'expression $\dfrac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$

e. Démontrer que Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

5. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

On suppose dans la suite que $\lambda = 13$ et $\mu = 17$. La clinique est capable d'accueillir un maximum de 80 animaux.

a. Majorer la probabilité de l'évènement $(Z \geqslant 80)$.

b. La clinique devrait-elle investir pour augmenter sa capacité d'accueil ?

⧫ Sujet 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(E_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2} y''(t) + y(t) = \sin(t).$$

1. a. Montrer que la fonction $f_1 : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{2}$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, si $n \neq 1$, la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2 - 1} \sin(t)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation différentielle :

$$(F_n) : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + n^2 y(t) = n^2 \sin(t).$$

3. a. Résoudre l'équation homogène associée à (F_n).

b. Donner la forme générale des solutions de (F_n) (et donc de (E_n)).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'unique solution g_n de (E_n) vérifiant $g_n(0) = 0$ et $g_n'(0) = 0$.

5. Déterminer, pour tout réel t, la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

⧫ Sujet 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Démontrer qu'il existe un réel α tel que $B^2 = \alpha B$.

2. **a.** Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre B^n et B.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Préciser X_0.

b. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

c. Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonlisable.

d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de M^n en fonction de n.

f. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n et en déduire une expression de A^n en fonction de n.

⧫ Sujet 10

On considère les polynômes $P_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k(X) = X^k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composée de $X+1$ suivie de P.
Par exemple, si $P(X) = X^3$ alors $P(X+1) = (X+1)^3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est une endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **a.** Montrer que la matrice de Δ_2 dans $\mathcal{B}_2$ est $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Quelles sont les valeurs propres de M_2 ? La matrice M_2 est-elle diagonalisable.

3. **a.** Déterminer la matrice M_3 de Δ_3 dans la base $\mathcal{B}_3$.

b. La matrice M_3 est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

4. **a.** Déterminer le noyau et l'image de Δ_3.

b. En déduire que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$Q(X) = P(X+1) - P(X).$$

Ce polynôme P est-il unique ?

5. **a.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente une valeur explicite de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en fonction de n.

⧫ Sujet 11

On considère l'application
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \mathrm{e}^x \end{array}.$$

Définition de la suite (u_n)

1. Dresser le tableau de variations de l'application f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

Dans toute la suite, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la solution de l'équation $f(x) = n$. On définit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Conjecture sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et représenter sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n). (On pourra s'aider pour le tracé d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique.)

4. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

Étude mathématique de la suite (u_n)

5. Étudier les variations de la suite (u_n).

6. En déduire que la suite (u_n) a une limite que l'on déterminera.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln(n)$.

8. Montrer que $e^{u_n} \sim n$.

9. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.

⧫ Sujet 12

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **a.** Rappeler la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

b. Rappeler l'inégalité de Tchebychev et ses hypothèses.

c. Démontrer que $\mathbf{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

d. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Pour tout réel $t \geqslant 0$, si la série converge, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)t^k$.

a. Vérifier que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

b. Exprimer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.

c. Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses.

d. En déduire que, pour tout réel $t > 0$, $\mathbf{P}(t^X \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(t-1-2\ln(t))}$.

e. Déterminer le minimum de la fonction $f : t \longmapsto t-1-2\ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$.

f. Démontrer que, pour tous réels $t > 1$ et $x \geqslant 0$,

$$x \geqslant 2\lambda \iff t^x \geqslant t^{2\lambda}.$$

g. En déduire $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

3. À l'aide de GeoGebra, comparer les deux majorations de $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda)$ obtenues dans les questions précédentes.

⧫ Sujet 13

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. **a.** Donner l'ensemble de définition de f.
   b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
   c. Calculer f' et f'' sur $]0\,;+\infty[$.
   d. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
   e. Montrer que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$ que l'on déterminera.
2. On considère la fonction F définie sur $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ par

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

   a. Calculer, pour tout $(x, y) \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.
   b. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que si $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$ alors $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$
   c. En déduire les points critiques de F.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. Étudier les variations de (u_n).
   c. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).
   d. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir le rang n à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$.

⧫ Sujet 14

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que (u_n) est bien définie et strictement positive.

3. Que fait la fonction suivante, écrite en Python ?

```
def mystere(n):
  u = 1
  for i in range(n):
    u = u + 1/u
  return u
```

Utiliser cette fonction pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) ainsi que celui de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Étudier les variations de (u_n).

5. Montrer que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n).

6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant 2(n-1)$.

7. On pose, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \geqslant \sqrt{2}(u_n - u_2).$$

b. En déduire la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c. À l'aide de la courbe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$S_n \leqslant 2\sqrt{n-2} - 1.$$

d. Déduire des questions précédentes un encadrement de u_n valable pour tout entier $n \geqslant 3$ puis donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

⧫ Sujet 15

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.

Partie A. Tirage sans remise
Dans cette partie, on effectue des tirages sans remise.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. Donner $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.

2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

4. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.

5. On définit la variable aléatoire $Y = 6 - X_2$.
Montrer que Y a la même loi que X_1.

6. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.

7. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X_2)$.

Partie B. Tirage avec remise
Dans cette partie, on effectue des tirages avec remise.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule noire et Y_2 la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la deuxième boule noire.

1. On considère le programme suivant, écrit en langage Python.

```python
from random import *

p = 2/5
nb_tirages = 1
while random() > p:
  nb_tirages += 1
print(nb_tirages)
```

Que renvoie ce programme ?

2. Donner la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

3. Donner $Y_2(\Omega)$.

4. Déterminer la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2).

5. En déduire la loi de Y_2.

6. On définit la variable aléatoire $Z = Y_2 - Y_1$.
Montrer que Z a la même loi que Y_1.

7. Donner une relation entre $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.

8. En déduire l'espérance de Y_2.

⧫ Sujet 16

Partie 1. Étude d'une fonction d'une variable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est impaire.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. La fonction f admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}^*$?
4. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?
5. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right)$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ possède en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

Partie 2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases}.$$

1. Calculer les premières valeurs de la suite (u_n), à la main ou avec un logiciel de votre choix.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n), ainsi que sa limite éventuelle.
2. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. En ayant recours à la fonction f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie 3. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

1. Donner les deux dérivées partielles de g.
2. En quels points la fonction g peut-elle admettre un extremum local ?
3. **a.** Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,
$$g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$
b. En déduire que g présente un extremum local en $(1, 1)$.
4. Démontrer que la fonction g ne présente pas d'extremum local en $(-1, -1)$.

⧫ Sujet 17

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un univers noté Ω.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre α et que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

I. Probabilités

1. **a.** Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

b. Donner la loi de Y son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbf{P}\left((X=0) \cup (Y=0)\right)$.

3. Montrer que $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} ((X=k) \cap (Y=k))$.

Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

II. Matrices

1. Soit deux réels positifs ou nuls a et b et $M = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de M en fonction de a et b.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M possède 3 valeurs propres distinctes.

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega) = \begin{pmatrix} -X(\omega) & X(\omega) & 0 \\ 2X(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ où X et Y sont les variables aléatoires de la partie I.

a. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit nulle.

b. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ soit inversible.

c. Donner la probabilité que la matrice $M(\omega)$ possède trois valeurs propres distinctes.

⧫ Sujet 18

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exprimer, pour tout $n\vec{n}\mathbb{N}$, S_n sous la forme d'une intégrale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Encadrer la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. À l'aide des questions précédentes, montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{3}{2}\ln(2)$.

6. **a.** Écrire en Python une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui renvoie la valeur de S_n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 1,0397$.

⧫ Sujet 19

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : une variable aléatoire X est une variable à densité si et seulement si sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. De plus, dans ce cas, on peut obtenir une densité de X en dérivant la fonction F en tout point où elle est dérivable et en lui donnant la valeur arbitraire 0 en tout point où F n'est pas dérivable.

Soit un nombre réel $\lambda > 0$.

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a. Donner une densité de Z, notée f_Z, ainsi que son espérance (sous la forme d'une intégrale, puis donner sa valeur sans calcul).

b. Donner le moment d'ordre 2 de Z, c'est-à-dire $\mathbf{E}(Z^2)$.

2. Soit f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

3. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes T_1 et T_2 admettant toutes deux la fonction f comme densité de probabilité.

a. Déterminer leur fonction de répartition F.

b. Montrer que T_1 et T_2 admettent une espérance et la calculer.

On considère différents systèmes de montage de panneaux solaires. On se limite aux systèmes comportant deux panneaux. On admet que T_1 modélise la durée du vie du premier panneau et T_2 la durée de vie du second.

4. Le premier système, noté S, tombe en panne lorsque l'un de ses deux éléments tombe en panne. On dit que le système S est monté en série. On note U l'instant où le système S tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(U > k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_U de U puis une densité f_U de U.

5. Le second système, noté S', tombe en panne lorsque ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système S' est monté en parallèle. On note V l'instant où le système S' tombe en panne.

a. Exprimer, pour tout réel k, l'évènement $(V \leqslant k)$ en fonction de T_1 et T_2.

b. Déterminer la fonction de répartition F_V de V puis une densité f_V de V.

⧫ Sujet 20

On peut modéliser la masse corporelle d'un rat musqué en fonction de son âge par le modèle de croissance de Gompertz.

Si on note t l'âge (en jours) du rat et $Y(t)$ sa masse (en grammes), on suppose que la fonction Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E)\ Y'(t) = -r\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right)Y(t)$$

avec r et K des réels strictement positifs tels que $0 < Y(0) < K$.

Dans la suite, on note Y une solution de cette équation différentielle et on admet que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $0 < Y(t) < K$.

1. **a.** Justifier que la fonction $f : y \longmapsto \dfrac{1}{-r\ln(\frac{y}{K})y}$ admet une primitive F sur $]0\,;K[$.

   b. Montrer que, pour tout réel t positif, $(F \circ Y)'(t) = 1$.

2. Vérifier que $F : y \longmapsto -\dfrac{1}{r}\ln\left(-\ln\left(\dfrac{y}{K}\right)\right)$ est une primitive de f sur $]0; K[$.

3. **a.** Déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle C telle que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$-\ln\left(\frac{Y(t)}{K}\right) = \mathrm{e}^{-r(t+C)}$$

   b. On pose $y_0 = Y(0)$. Établir que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right) = \ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$.

   c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = K\exp\left[\ln\left(\dfrac{y_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right]$.

4. Étudier les variations de la fonction Y sur $[0\,;+\infty[$. Que représente la constante K ?

5. On considère la fonction Z définie pour tout $t \geqslant 0$ par $Z(t) = \ln\left(-\ln\left(\dfrac{Y(t)}{K}\right)\right)$.

   Démontrer que Z est une fonction affine de coefficient directeur $-r$. Préciser son ordonnée à l'origine.

6. *Détermination expérimentale de y_0, K et r*

   Le tableau ci-contre contient les valeurs mesurées tous les 20 jours de la masse du rat, de sa naissance à son 301$^{\text{e}}$ jour. On note T_i le temps de mesure et M_i la masse mesurée le jour T_i.

   a. Proposer des valeurs de y_0 et K.

   b. Indiquer comment on pourrait proposer une valeur expérimentale de r.

Temps (j)	Masse (g)
0	16,00
20	116,06
40	304,48
60	486,91
80	611,92
100	683,91
120	721,96
140	741,24
160	750,81
180	755,51
200	757,81
220	758,93
240	759,48
260	759,75
280	759,88
300	759,94