ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Option Biochimie-Biologie)

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les différentes parties du problème sont indépendantes.

N.B. – Les candidats sont priés :

1. D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement, des respecter les notations de l'énoncé.

2. De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.

3. De donner les résultats encadrés.

Tourner la page S.V.P.

Les vaches constituant le cheptel d'une grosse exploitation agricole sont de deux types, le type A et le type B.

PARTIE A

La probabilité qu'une vache de type A produise du lait en hiver est égale à $0,8$ et la probabilité qu'une vache de type B produise du lait en hiver est de $0,7$. La production de lait en hiver est indépendante d'un animal à l'autre quel que soit son type.

Dans cette partie le cheptel est formé de 200 vaches de type A et de 300 vaches de type B.

1. On choisit une bête au hasard dans ce cheptel.
   a) Quelle est la probabilité qu'elle produise du lait en hiver ?
   b) La vache produit du lait en hiver, quelle est la probabilité qu'elle soit du type A ?
2. On note N_A le nombre de vaches de type A du cheptel qui produise du lait un hiver donné et N_B le nombre de vaches de type B du cheptel qui produisent du lait durant ce même hiver.
   On note $N = N_A + N_B$.
   a) Que représente N ?
   b) Donner les lois de N_A et N_B.
   c) Quel est le nombre moyen de vaches du cheptel produisant du lait l'hiver considéré ?
   d) Pour chaque vache de type A produisant du lait en hiver il faut compter une dépense de 4 euros par jour pour des complémenta alimentaires ; pour une vache de type B cette dépense journalière est de 3 euros.
   Pour le cheptel considéré quelle est la dépense journalière moyenne à prévoir en compléments alimentaires pour les vaches produisant du lait en hiver ?

PARTIE B

L'exploitation dispose de deux hangars H et H' pour le stockage du foin. Chaque jour on cherche le foin nécessaire dans l'un des deux hangars. Pour des raisons techniques si, un jour donné on utilise le hangar H, le lendemain on réutilisera ce même hangar avec une probabilité de $0,5$ et si, un jour donné on utilise le hangar H', la probabilité d'utiliser le lendemain le hangar H est égale à $0,4$.

On veut analyser l'utilisation des deux hangars sur une longue période ; le premier jour on choisit un hangar au hasard.

Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité que le hangar H soit utilisé le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. a) Donner p_1.
   b) Calculer p_2.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4$.
3. a) En déduire la valeur de p_n pour tout entier naturel n non nul.
   b) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

PARTIE C

Une étude statistique montre que pour ce cheptel le nombre d'incidents dans une salle de traite, un jour donné, est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre 4. De plus cette étude indique que, pour un jour donné, les différents incidents dans la salle de traite sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un incident dans la salle de traite donne lieu à des soins vétérinaires est égale à $0,05$.

1. Quel est le nombre moyen d'incidents par jour dans la salle de traite ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir, un jour donné, au moins deux incidents dans la salle de traite ?
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'incidents dans la salle de traite qui, pour un jour donné, nécessitent des soins vétérinaires.
   a) On considère deux entiers naturels n et k.
   Calculer la probabilité conditionnelle suivante : $P\left(X = k \mid N = n\right)$.
   On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.
   b) En déduire la probabilité $P\left(X = k\right)$ pour tout entier naturel k.
   Quelle est la loi de la variable X ?
4. On s'intéresse aux incidents survenus dans la salle de traite durant trente jours consécutifs.
   Pour tout entier i, compris entre un et trente, on note N_i le nombre d'incidents lors du $i^{\text{ème}}$ jour.
   On suppose que, pour tout i, N_i suit la même loi que N et que les variables N_i sont indépendantes.
   On pose : $\quad S = \sum\limits_{i=1}^{30} N_i \quad$ et $\quad M = \dfrac{1}{30} S.$
   a) Donner la loi de la variable S.
   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable M.

PARTIE D

1. On considère la fonction f définie par : $\quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} k \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) \text{ si } x \in [0, 12] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$
   Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. La durée, en minutes, d'un examen vétérinaire d'une vache quelconque du cheptel est une variable aléatoire réelle D qui admet f comme densité.
   a) Déterminer la fonction de répartition de D.
   b) Calculer l'espérance mathématique de D.
3. On examine un groupe de cinq vaches, numérotées de 1 à 5. Soit i un entier naturel supérieur ou égal à un et inférieur ou égal à cinq ; la durée, en minutes, de l'examen pour la vache numéro i est une variable aléatoire D_i de même densité que D. Les variables aléatoires D_i sont supposées indépendantes.
   a) Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit inférieure ou égale à six minutes.
   b) Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit au moins égale à trois minutes.

FIN