Feuille de calcul n°4 – Dénombrement et probabilités

Exercice 1. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$?
3. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les éléments de E ? (On ne demande pas que les mots formés aient un sens en français.)

Solution.

1. $\boxed{\text{Card}(E) = 7}$.
2. $\boxed{\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^7 = 128}$.
3. Avec les lettres de E, on peut former $\boxed{7^5 = 16\,807 \text{ mots différents}}$.

Exercice 2. Le clavier d'un digicode comprend 13 touches : A, B, C, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un code est composé d'une lettre suivie de 4 chiffres (pas nécessairement distincts).

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes contenant 4 chiffres distincts ?
4. Une personne est née en 1987. Elle a oublié le code mais elle sait que celui-ci commence par A et contient les 4 chiffres de son année de naissance. Combien d'essais au maximum devra-t-elle faire avant de retrouver le code ?

Solution.

1. Il y a 3 choix pour la lettre et 10^4 choix pour les 4 chiffres donc il y a $\boxed{3 \times 10^4 = 30000 \text{ codes possibles}}$.
2. Il y a 3 choix pour la lettre et 9^4 choix pour les 4 chiffres donc il y a $\boxed{3 \times 9^4 = 19683 \text{ codes possibles}}$ ne contenant pas le chiffre 1.
3. Il y a 3 choix pour la lettre et $10 \times 9 \times 8 \times 7$ choix pour les 4 chiffres différents donc il y a $\boxed{3 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 15120 \text{ codes contenant 4 chiffres distincts}}$.
4. La personne n'a pas le choix pour la lettre et elle sait que les lettres forment une permutation de $\{1, 9, 8, 7\}$. Ainsi, au maximum, la personne devra faire $\boxed{4! = 24 \text{ essais}}$.

Exercice 3. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1. Déteminer la valeur de a.
2. Écrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.

   a. A : « Obtenir un chiffre pair »

b. B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »

c. C = A ∪ B.

Solution.

1. Comme la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1, on a $\mathbf{P}(1)+\mathbf{P}(2)+\mathbf{P}(3)+\mathbf{P}(4)+\mathbf{P}(5)+\mathbf{P}(6)=1$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{12}+a+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}=1$.

On en déduit que $a=1-\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}\right)$ soit $\boxed{a=\dfrac{1}{6}}$.

2. a. $\mathrm{A}=\{2,4,6\}$ donc $\mathbf{P}(\mathrm{A})=\mathbf{P}(2)+\mathbf{P}(4)+\mathbf{P}(6)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{A})=\dfrac{1}{3}}$.

b. $\mathrm{B}=\{1,2,3,4,5\}$ donc $\mathrm{B}=\overline{\{6\}}$ et ainsi $\mathbf{P}(\mathrm{B})=1-\mathbf{P}(6)=1-\dfrac{1}{12}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{B})=\dfrac{11}{12}}$.

c. $\mathrm{C}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{C})=1}$.

Exercice 4. Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements B et $A\cap B$ sont données par les égalités $\mathbf{P}(B)=\frac{3}{4}$ et $\mathbf{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$.

1. Calculer $\mathbf{P}_B(A)$.

2. La probabilité de B sachant A est $\frac{2}{3}$. En déduire la probabilité de A.

3. Déterminer $\mathbf{P}(A\cup B)$.

Solution.

1. $\mathbf{P}_B(A)=\dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$ soit $\boxed{P_B(A)=\dfrac{8}{15}}$.

2. Étant donné que $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}_A(B)$, on a $\mathbf{P}(A)=\dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}_A(B)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A)=\dfrac{3}{5}}$

3. $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A\cup B)=\dfrac{19}{20}}$.

Exercice 5. On considère deux évènements A et B liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$. On donne $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(B)=\frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}$. Déterminer les probabilités suivantes.

a) $\mathbf{P}(\overline{A})$ b) $\mathbf{P}(A\cup B)$ c) $\mathbf{P}_A(B)$ d) $\mathbf{P}_B(A)$ e) $\mathbf{P}_A(\overline{B})$ f) $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Solution.

a) $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)=1-\dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A})=\dfrac{2}{3}}$.

b) $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{16}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A\cup B)=\dfrac{19}{48}}$.

c) $\mathbf{P}_A(B)=\dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}}$ soit $\boxed{\mathbf{P}_A(B)=\dfrac{9}{16}}$.

d) $\mathbf{P}_B(A)=\dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}$ soit $\boxed{\mathbf{P}_B(A)=\dfrac{3}{4}}$.

e) $\mathbf{P}_A(\overline{B})=1-\mathbf{P}_A(B)=1-\dfrac{9}{16}$ soit $\boxed{\mathbf{P}_A(\overline{B})=\dfrac{7}{16}}$.

f) $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})}{\mathbf{P}(\overline{A})}$. Or, comme $\overline{A}\cap\overline{B}$ est l'évènement contraire de $A\cup B$ donc $\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\mathbf{P}(A\cup B)=1-\dfrac{19}{48}=\dfrac{29}{48}$. Ainsi, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{\frac{29}{48}}{\frac{2}{3}}$ soit $\boxed{\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{29}{32}}$.

Exercice 6. Une expérience aléatoire est modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$ sur un univers Ω. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}5$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Calculer

1. $\mathbf{P}(\overline{A})$ **2.** $\mathbf{P}(\overline{B})$ **3.** $\mathbf{P}(A \cup B)$ **4.** $\mathbf{P}_A(B)$ **5.** $\mathbf{P}_B(A)$ **6.** $\mathbf{P}_A(\overline{B})$ **7.** $\mathbf{P}_B(\overline{A})$.

Solution.

1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}) = 0{,}4}$.
2. $\mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(B)$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{B}) = 0{,}5}$.
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}8}$.
4. $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6}$ donc $\boxed{\mathbf{P}_A(B) = 0{,}5}$.
5. $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5}$ donc $\boxed{\mathbf{P}_B(A) = 0{,}6}$.
6. $\mathbf{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}_A(B)$ donc $\boxed{\mathbf{P}_A(\overline{B}) = 0{,}5}$.
7. $\mathbf{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}_B(A)$ donc $\boxed{\mathbf{P}_B(\overline{A}) = 0{,}4}$.