Feuille de calcul n°8 — Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 1. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Si la carte obtenue est un as, on gagne 5 euros, si c'est une figure, on gagne 1 euro et, sinon, on perd 3 euros.

Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 32 cartes. On a alors $\mathbf{P}(X=5)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, $\mathbf{P}(X=1)=\frac{4\times 3}{32}=\frac{3}{8}$ et $\mathbf{P}(X=-1)=\frac{4\times 4}{32}=\frac{1}{2}$. Ainsi la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	5
$\mathbf{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	2	6	18	23	24
$\mathbf{P}(X=x_i)$	0,15	0,1	0,6	0,05	0,1

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « X est égale à un nombre pair ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement B : « X est égale à un multiple de 3 ».
4. Calculer $\mathbf{P}(X>2)$.

Solution.

1. $X(\Omega)=\{2\,;6\,;18\,;23\,;24\}$.
2. La probabilité de l'évènement « X est égal à un nombre pair » est
$$\mathbf{P}(X=2)+\mathbf{P}(X=6)+\mathbf{P}(X=18)+\mathbf{P}(X=24)=0{,}15+0{,}1+0{,}6+0{,}1=0{,}95.$$
On peut aussi calculer cette probabilité de la manière suivante :
$$1-\mathbf{P}(X=23)=1-0{,}05=0{,}95.$$
3. La probabilité de l'évènement « X est égal à un multiple de 3 » est
$$\mathbf{P}(X=6)+\mathbf{P}(X=18)+\mathbf{P}(X=24)=0{,}1+0{,}6+0{,}1=0{,}8.$$
4. $\mathbf{P}(X>2)=\mathbf{P}(X=6)+\mathbf{P}(X=18)+\mathbf{P}(X=23)+\mathbf{P}(X=24)=0{,}1+06+0{,}05+0{,}1=0{,}85$.
On a aussi $\mathbf{P}(X>2)=1-\mathbf{P}(X\leqslant 2)=1-\mathbf{P}(X=2)=1-0{,}15=0{,}85$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	-3	1	6	9	12
$\mathbf{P}(X=x_i)$	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la variance de X.

Solution.

1. Par définition,

$$\mathbf{E}(X) = 0{,}5 \times (-3) + 0{,}1 \times 1 + 0{,}1 \times 6 + 0{,}1 \times 9 + 0{,}2 \times 12 = 2{,}5.$$

2. Grâce à la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = 0{,}5 \times (-3)^2 + 0{,}1 \times 1^2 + 0{,}1 \times 6^2 + 0{,}1 \times 9^2 + 0{,}2 \times 12^2 - 2{,}5^2 = 38{,}85.$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	2	a
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,5	0,2	0,3

Calculer la valeur de a sachant que $\mathbf{E}(X) = 1{,}4$.

Solution. D'après le tableau, l'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = 0{,}5 \times (-1) + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3a = 0{,}3a - 0{,}1.$$

Or, l'énoncé précise que $\mathbf{E}(X) = 1{,}4$ donc $0{,}3a - 0{,}1 = 1{,}4$ i.e. $0{,}3a = 1{,}5$ et donc $a = \frac{1{,}5}{0{,}3}$ c'est-à-dire $a = 5$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant.

x_i	-3	-2	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,6	0,2	0,05	0,1	0,05

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\mathbf{E}(X) = -0{,}4$.
2. Si on multiplie par 2 toutes les valeurs prises par X alors $\mathbf{E}(X)$ est multipliée par 2.
3. Si on augmente toutes les valeurs prises par X de 10% alors $\mathbf{E}(X)$ est multipliée par 0,1.

Solution.

1. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = 0{,}6 \times (-3) + 0{,}2 \times (-2) + 0{,}05 \times 0 + 0{,}1 \times 1 + 0{,}05 \times 2 = -2$$

   donc l'affirmation est fausse.
2. L'affirmation est vraie par linéarité de l'espérance : $\mathbf{E}(2X) = 2\mathbf{E}(X)$.
3. Augmenter toutes les valeurs de 10% revient à les multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(1{,}1X) = 1{,}1\mathbf{E}(X)$ donc l'espérance sera aussi multipliée par 1,1. L'affirmation est fausse.