Feuille de calcul n°7 — Primitives et intégrales

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I. (On donnera la réponse sans justification.)

a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$ *b)* $f(x) = \cos(x)$; $I = \mathbb{R}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $I = \mathbb{R}$ *e)* $f(x) = \sin(3x+1)$; $I = \mathbb{R}$ *f)* $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$; $I = \mathbb{R}$ *h)* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{(3-2\sin x)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

Solution. Dans chaque cas, une primitive de f sur I est la fonction F donnée par :

a) $\boxed{F : x \longmapsto 3\ln(x)}$

b) $\boxed{F : x \longmapsto \sin(x)}$

c) $\boxed{F : x \longmapsto 2\sqrt{x}}$

d) $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x}$

e) $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos(3x+1)}$

f) $\boxed{F : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}}$

g) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+2}$ donc $\boxed{F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)}$

h) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2\cos(x)}{(3-2\sin(x))^3}$ donc $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2(3-2\sin(x))^2}\right)$

i.e. $\boxed{F : x \longmapsto \dfrac{1}{4(3-2\sin(x))^2}}$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto x^3\mathrm{e}^{x^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

Solution.

1. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{2}(x^2-1) \times 2x\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2} + x^3\mathrm{e}^{x^2} - x\mathrm{e}^{x^2} = x^3\mathrm{e}^{x^2} = f(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. On en déduit que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{e}^{x^2} + c$ où $c \in \mathbb{R}$. On cherche alors c tel que $\frac{1}{2}(0^2-1)\mathrm{e}^{0^2} + c = 0$ i.e. $-\frac{1}{2} + c = 0$ donc $c = \frac{1}{2}$. On conclut que la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{2}}$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^3 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x-4)\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_4^2 \frac{1}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_2^3 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_7 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

Solution.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)$$

soit $\boxed{I_1 = 1}$.

$$I_2 = \int_0^3 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 0$$

soit $\boxed{I_2 = 0}$.

$$I_3 = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x-4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2+x-4)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(1^1+1-4)^2}{2} - \frac{(0^2+0-4)^2}{2}$$

soit $\boxed{I_3 = -6}$.

$$I_4 = \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2+1)\right]_1^3 = \ln(10) - \ln(2) = \ln\left(\frac{10}{2}\right)$$

soit $\boxed{I_4 = \ln(5)}$.

$$I_5 = \int_4^2 \frac{1}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{4-3x}\right)\right]_4^2 = \frac{1}{-6} - \frac{1}{-24}$$

soit $\boxed{I_5 = -\frac{1}{8}}$.

$$I_6 = \int_2^3 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_2^3$$

soit $\boxed{I_6 = \dfrac{\mathrm{e}^9 - \mathrm{e}^4}{2}}$.

$$I_7 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t} \times \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\left[\ln(e)^2 - \ln(1)^2\right]$$

soit $\boxed{I_7 = \dfrac{1}{2}}$.

$$I_8 = \int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t^2)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\arctan(t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\arctan(1) - \arctan(0)\right]$$

soit $\boxed{I_8 = \dfrac{\pi}{8}}$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties.

$$I = \int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad K = \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$$

Indication. Pour K, on pourra effectuer deux intégrations par parties successives.

Solution.

• Calcul de $I = \displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto \frac{t^2}{2}$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;e]$. On en déduit que

$$I = \left[\ln(t) \times \frac{t^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1}{2}\ln(1) - \int_1^e \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

donc $\boxed{= \dfrac{e^2+1}{4}}$.

• Calcul de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\cos(t)$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \sin(t)$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
J &= [t \times (-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0(-\cos(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{J = 1}$.

• Calcul de $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$.

Écrivons K sous la forme $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t)) \times 1\,\mathrm{d}t$ et posons $u : t \longmapsto \sin(\ln(t))$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}\cos(\ln(t))$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\mathrm{e}^\pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
K &= [\sin(\ln(t)) \times t]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \frac{1}{t}\cos(\ln(t)) \times t\,\mathrm{d}t \\
&= \sin(\ln(\mathrm{e}^\pi)) \times \mathrm{e}^\pi - \sin(\ln(1)) \times 1 - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \sin(\pi) \times \mathrm{e}^\pi - \sin(0) \times 1 - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Procédons à une seconde intégrations par parties pour calculer cette nouvelle intégrale. Posons $u_1 : t \longmapsto \cos(\ln(t))$ et $v_1 : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u_1' : t \longmapsto -\frac{1}{t}\sin(\ln(t))$ et $v_1' : t \longmapsto 1$.

Ainsi, u_1 et v_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\mathrm{e}^\pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= [\cos(\ln(t)) \times t]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} -\frac{1}{t}\sin(\ln(t)) \times t\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(\ln(\mathrm{e}^\pi)) \times \mathrm{e}^\pi - \cos(\ln(1)) \times 1 + \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d} \\ &= \cos(\pi)\mathrm{e}^\pi - \cos(0) + K \\ &= -\mathrm{e}^\pi - 1 + K\end{aligned}$$

Ainsi, $K = -(-\mathrm{e}^\pi - 1 + K)$ donc $2K = \mathrm{e}^\pi + 1$ et on conclut que $\boxed{K = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}}$.

Exercice 5.

a) Calculer $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x}\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = \ln(x)$.

Solution

a) La fonction $\varphi : t \longmapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;4]$ donc, en posant $u = \varphi(t)$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ donc, comme $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{4} = 2$,

$$I = \int_1^4 (1-\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (1-u)2\,\mathrm{d}u = \left[-(1-u)^2\right]_1^2 = -(-1)^2 - (-0^2)$$

donc $\boxed{I = -1}$.

b) La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;e]$ donc, en posant $u = \varphi(x)$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ donc, comme $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$,

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+2}$$

donc $\boxed{I_n = \dfrac{1}{n+1}}$.