Feuille de calcul n°7 — Primitives et intégrales

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I. (On donnera la réponse sans justification.)

a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$ *b)* $f(x) = \cos(x)$; $I = \mathbb{R}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $I = \mathbb{R}$ *e)* $f(x) = \sin(3x+1)$; $I = \mathbb{R}$ *f)* $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$; $I = \mathbb{R}$ *h)* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{(3-2\sin x)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto x^3\mathrm{e}^{x^2}$.

2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^3 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x-4)\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_4^2 \frac{1}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_2^3 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_7 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties.

$$I = \int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad K = \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$$

Indication. Pour K, on pourra effectuer deux intégrations par parties successives.

Exercice 5.

a) Calculer $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x}\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = \ln(x)$.