Feuille de calcul n°6 — Limites et variations

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et donner, lorsque cela est possible, une interprétation graphique de cette limite.

1) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$; $a = +\infty$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$; $a = +\infty$ 3) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$; $a = +\infty$

4) $f(x) = \ln(x) + x$; $a = 0$ 5) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; $a = -\infty$ 6) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $a = 0$

7) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$; $a = -\infty$ 8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $a = +\infty$ 9) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$; $a = +\infty$

10) $f(x) = x^2 - x$; $a = -\infty$ 11) $f(x) = \ln(x) + 2x$; $a = +\infty$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^x}$; $a = -\infty$

13) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$; $a = -\infty$ 14) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$; $a = +\infty$ 15) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \ln(x)$; $a = 0$

16) $f(x) = \ln(x) + x$; $a = 0$ 17) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; $a = -\infty$ 18) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $a = 0$

19) $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$; $a = +\infty$ 20) $f(x) = \ln(x) - x^3$; $a = +\infty$ 21) $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x)$; $a = +\infty$

Solution.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2) En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{x}{2x} \sim \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} = \frac{1}{2}}$.

3) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par somme, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc, comme x tend vers 0^+ (sinon, f n'est pas définie), par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

8) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$

9) En $+\infty$, $\frac{x}{x+1} \sim \frac{x}{x} \sim 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. De plus, ln est continue en 1 donc $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$. Ainsi, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

10) En $-_infty$, $f(x) \sim x^2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty}$.

11) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

12) Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$. De plus, pour tout $x < 0$, $x\,\mathrm{e}^x < 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0^-$. Par inverse, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty}$.

13) Par théorème, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+1 = 1$. De plus, $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

14) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{e^x} \sim 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

15) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1+x^2\ln(x)}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} 1 + x^2\ln(x) = 1$. Par quotient, comme $x > 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty}$.

16) $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty}$.

17) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

18) Comme $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ et comme $x > 0$, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty}$.

19) Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right]$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1 = -1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

20) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \left[\frac{\ln(x)}{x^3} - 1\right]$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} - 1 = -1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

21) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right]$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$. Ainsi, par produit, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. Sur quel ensemble D la fonction f est-elle dérivable ? Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$ et en déduire les variations de f.
2. Étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Solution.

1. La fonction f est la différence de la fonction $f_1 : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ et de la fonction $f_2 : x \longmapsto x$. La fonction f_2 est linéaire donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f_1 est la composée de la fonction polynôme $x \longmapsto 1+x^2$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$. On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$
Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$. Par différence, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] - x = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - x \\ &= 2\ln x - x + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right). \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}+1=1$ et, par continuité de la fonction ln, $\lim\limits_{X\to1} \ln X=\ln 1=0$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=0$.
- Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln x}{x}-1=-1$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\dfrac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$.

Par somme, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

3. Étudier la position relative de T et $\mathcal{C}_f$.

Solution.

1. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\boxed{f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}$.

2. Une équation de T est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$. Or, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$ donc $T: y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{T: y=-\dfrac{1}{2}x+1}$.

3. Posons, pour tout réel x, $d(x)=f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}x-1=\frac{2+x(x^2+1)-2(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x^3+x-2x^2}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{x(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $d(x)$ est le signe de x donc $\underline{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } T \text{ sur }]-\infty\,;0] \text{ et } \mathcal{C}_f}$ $\underline{\text{est au-dessus de } T \text{ sur } [0\,;+\infty[}$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (en distinguant éventuellement limites à droite et à gauche.)

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Solution.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to0} \mathrm{e}^X=1$ (par continuité de exp en 0) donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=1}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X=+\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=0}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, on en déduit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles }]-\infty\,;0[\text{ et }]0\,;+\infty[}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{x+x} - \mathrm{e}^{-x+x}}{\mathrm{e}^{x+x} + \mathrm{e}^{-x+x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$. Il s'ensuit, par somme et quotient, que $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = -1}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{Y-1}{Y+1} = \lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{Y}{Y} = \lim\limits_{Y \to +\infty} 1 = 1$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 1}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée, somme, différence et quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{[(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})][(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})]}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.