TB2 **octobre 2024**

Feuille de calcul n°6 — Limites et variations

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et donner, lorsque cela est possible, une interprétation graphique de cette limite.

1) $f(x) = x + \mathrm{e}^{x}$; $a = +\infty$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$; $a = +\infty$ 3) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$; $a = +\infty$

4) $f(x) = \ln(x) + x$; $a = 0$ 5) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$; $a = -\infty$ 6) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $a = 0$

7) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$; $a = -\infty$ 8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $a = +\infty$ 9) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$; $a = +\infty$

10) $f(x) = x^2 - x$; $a = -\infty$ 11) $f(x) = \ln(x) + 2x$; $a = +\infty$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{x\,\mathrm{e}^{x}}$; $a = -\infty$

13) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{x}+1)$; $a = -\infty$ 14) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$; $a = +\infty$ 15) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \ln(x)$; $a = 0$

16) $f(x) = \ln(x) + x$; $a = 0$ 17) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$; $a = -\infty$ 18) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $a = 0$

19) $f(x) = \mathrm{e}^{x} - x^2$; $a = +\infty$ 20) $f(x) = \ln(x) - x^3$; $a = +\infty$ 21) $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \ln(x)$; $a = +\infty$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. Sur quel ensemble D la fonction f est-elle dérivable ? Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$ et en déduire les variations de f.
2. Étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.
3. Étudier la position relative de T et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (en distinguant éventuellement limites à droite et à gauche.)
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.