# Feuille de calcul n°5 — Dérivation

**Exercice 1.** Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de $f$ sur $I$.

1. $f(x) = -3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$, $I = R$.
3. $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$, $I = ]0\,;+\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1-4x}$, $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$.
5. $f(x) = \sqrt{2x+4}$, $I = ]-2\,;+\infty[$.

**Solution.**

1. Pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) = -3}$.
2. Pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2x - 2}$.
3. Pour tout $x \in I$,
$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + x + 1}{2\sqrt{x}}$$
donc $\boxed{f'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}}$.
4. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{-4}{(1-4x)^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{4}{(1-4x)^2}}$.
5. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}}$.

**Exercice 2.** Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de $f$ sur $I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité. On s'efforcera de simplifier au maximum le résultat.

1. $f : x \longmapsto \frac{x^3+3x+1}{3}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $g : x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^x$, $I = \mathbb{R}$.
3. $h : x \longmapsto \dfrac{x^4 - \mathrm{e}^x}{x^4 + \mathrm{e}^x}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $k : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, $I = ]0\,;+\infty[$.
5. $\ell : x \longmapsto (2x+1)^5$, $I = \mathbb{R}$.
6. $m : x \longmapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + x)^3}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $n : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{2x-4}}$, $I = ]2\,;+\infty[$.

**Solution.**

**1.** En écrivant, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^3+3x+1)$, on en déduit que, pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{1}{3}(3x^2+3)$ i.e. $\boxed{f'(x) = x^2+1}$.

**2.** Pour tout réel $x$, $g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x} + x^2\,\mathrm{e}^{x}$ i.e. $\boxed{f(x) = x(x+2)\,\mathrm{e}^{x}}$.

**3.** Pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(4x^3-\mathrm{e}^{x})(x^4+\mathrm{e}^{x})-(x^4-\mathrm{e}^{x})(4x^3+\mathrm{e}^{x})}{(x^4+\mathrm{e}^{x})^2} \\ &= \frac{4x^7+4x^3\,\mathrm{e}^{x}-x^4\,\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}-(4x^7+x^4\,\mathrm{e}^{x}-4x^3\,\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x})}{(x^4+\mathrm{e}^{x})^2} \\ &= \frac{4x^7+4x^3\,\mathrm{e}^{x}-x^4\,\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}-4x^7-x^4\,\mathrm{e}^{x}+4x^3\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}{(x^4+\mathrm{e}^{x})^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^3(4-x)\,\mathrm{e}^{x}}{(x^4+\mathrm{e}^{x})^2}}$.

**4.** Pour tout réel $x > 0$, $\boxed{k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$.

**5.** Pour tout réel $x$, $\ell'(x) = 5 \times 2(2x+1)^4$ i.e. $\boxed{f'(x) = 10(2x+1)^4}$.

**6.** Pour tout réel $x$, $\boxed{m'(x) = -3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{(\mathrm{e}^{x}+x)^4}}$.

**7.** Pour tout réel $x > 2$,

$$n'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}\sqrt{2x-4} - \mathrm{e}^{2x} \times \frac{2}{2\sqrt{2x-4}}}{\sqrt{2x-4}^2} = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}(2x-4)-\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{2x-4}^3}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(4x-9)}{\sqrt{2x-6}^3}}$.

**Exercice 3.** Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de $f$ sur $D$.

$$\text{a) } f(x) = \cos(4x+2),\ D = \mathbb{R} \qquad \text{b) } f(x) = \cos^3(x),\ D = \mathbb{R}.$$

**Solution.**

a) La fonction $f$ est de la fonction $x \longmapsto u(ax+b)$ avec $u = \cos$, $a = 4$ et $b = 2$ donc, pour tout réel $x$, $f'(x) = 4 \times (-\sin(4x+2))$ i.e. $\boxed{f'(x) = -4\sin(4x+2)}$.

b) La fonction $f$ est de la forme $f = u^3$ avec $u = \cos$ donc, pour tout réel $x$, $f'(x) = 3(-\sin(x))\cos^2(x)$ donc $\boxed{f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)}$.

**Exercice 4.** Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. (On ne demande pas de justifier la dérivabilité de $f$ sur $I$.)

$$\text{a) } f : x \longmapsto \ln(\sin x) \quad I = ]0\,;\pi[ \qquad \text{b) } f : x \longmapsto \ln(\sqrt{1+x^2}) \quad I = \mathbb{R}.$$

**Solution.**

a) Pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$.

b) Première méthode. — Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}}$.

Seconde méthode. — Pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}}$.

**Exercice 5.** Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants. (On ne demande pas de justifier la dérivabilité de $f$.)

a) $f(x) = (3x+2)^5$ ; b) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ ; c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{x^2}+2}$.

**Solution.**

a) Pour tout réel $x$, $f'(x) = 5 \times 3 \times (3x+2)^4$ soit $\boxed{f'(x) = 15(3x+2)^4}$.

b) Pour tout réel $x$, $\boxed{f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}}$.

c) Pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2\sqrt{\mathrm{e}^{x^2}+2}}$ soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x^2}+2}}}$.

**Exercice 6.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\sin x + 3}$. Justifier soigneusement que $f$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

**Solution.** La fonction $f$ est la composée de la fonction $u : x \longmapsto \sin(x) + 3$ et de la fonction racine carrée. La fonction $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. De plus, pour tout réel $x$, $\sin(x) \geqslant -1$ donc $u(x) \geqslant 2$ et, ainsi, $u(x) \in\, ]0\,;+\infty[$. On conclut que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et, pour tout réel $x$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)+3}}}$.

**Exercice 7.** Dans chaque cas, déterminer l'ensemble $D$ de dérivabilité de $f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.

a) $f : x \longmapsto \sqrt{2x+1}$; b) $f : x \longmapsto (\sqrt{x}+2)^5$;

c) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2+x+1}{3}$ d) $f : x \longmapsto \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^4$

**Solution.**

a) Considérons $u : x \longmapsto 2x+1$. Alors, $f = \sqrt{u}$ donc $f$ est dérivable sur $D$ si et seulement si $u$ est dérivable et strictement positive sur $D$. Or, $u$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Ainsi, $D = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et, pour tout $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}$ i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}$.

b) Considérons $u : x \longmapsto \sqrt{x}+2$. Alors, $f = u^5$ donc $f$ est dérivable sur $D$ si et seulement si $u$ est dérivable sur $D$. Or, par somme, $u$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc $D = \,]0\,;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in\, ]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+2)^4$ i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{5(\sqrt{x}+2)^4}{2\sqrt{x}}}$.

c) Pour tout réel $x$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ donc $f$ est une fonction polynôme. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$.

d) Considérons $u : x \longmapsto \frac{x+2}{x+3}$. Alors, $f = u^4$ donc $f$ est dérivable sur $D$ si et seulement si $u$ est dérivable sur $D$. Comme $u$ est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition donc $D = ]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in D$,

$$u'(x) = \frac{1 \times (x+3) - (x+2) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}$$

donc $f'(x) = 4 \times \frac{1}{(x+3)^2}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^3$ qu'on peut aussi écrire $\boxed{f'(x) = \frac{4(x+2)^3}{(x+3)^5}}$.