Corrigés de la feuille de calcul n°2 — Systèmes et inverses de matrices

Exercice 1. Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode qui vous semble la plus adaptée.

$$(S_1)\begin{cases}7x-3y=1\\ y=2\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x+y=1\\ 2x-4y=-14\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x-2y=1\\ -3x+6y=1\end{cases}\qquad (S_4)\begin{cases}2x+3y=2\\ -x-1{,}5y=1\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\iff\begin{cases}7x-3\times 2=1\\ y=2\end{cases}\iff\begin{cases}7x=7\\ y=2\end{cases}\iff\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_1) est $(1\,;2)$.

$$(S_2)\iff\begin{cases}10x=-10 & L_1\leftarrow 4L_1+L_2\\ 5y=15 & L_2\leftarrow L_1-L_2\end{cases}\iff\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_2) est $(1\,;3)$.

$$(S_3)\iff\begin{cases}0=2 & L_1\leftarrow 3L_1+L_2\\ -3x+6y=1\end{cases}$$

On aboutit à un système incompatible donc l'ensemble des solutions de (S_3) est $\varnothing$.

$$(S_4)\iff\begin{cases}0=4 & L_1\leftarrow L_1+2L_2\\ -x-1{,}5y=1\end{cases}$$

On aboutit à un système incompatible donc l'ensemble des solutions de (S_4) est $\varnothing$.

Exercice 2. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}2x+y-z=5\\ 2y+3z=-2\\ 3z=4\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}x+2y+4z=1\\ 3z=6\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}2x+y-2z=4\\ 3y-z=8\\ 0=2\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\iff\begin{cases}2x+y-\frac{4}{3}=5\\ 2y+4=-2\\ z=\frac{4}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}2x-3=5+\frac{4}{3}\\ y=-3\\ z=\frac{4}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}2x=\frac{19}{3}+3\\ y=-3\\ z=\frac{4}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{14}{3}\\ y=-3\\ z=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $\left(\frac{14}{3}\,;-3\,;\frac{4}{3}\right)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+8=1 \\ \qquad\quad z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y-7 \\ z=2 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(-2y-7\,;y\,;2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des solutions de (S_3) est vide en raison de la dernière équation.

Exercice 3. Échelonner puis résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases} 5x-3y=2 \\ x-2y=-8 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{6}x-3y=1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=2 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} 5x-3y=1 \\ \quad -\frac{7}{5}y=-\frac{42}{5} \quad L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{5}L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x-18=2 \\ \qquad\quad y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $(4\,;6)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0 \\ \qquad\qquad 0=1 \quad L_2 \leftarrow L_2-\sqrt{3}L_1 \end{cases}$$

Ainsi, on aboutit à un système incompatible sur l'ensemble des solutions des $\varnothing$.

$$(S_3) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=2 \\ \qquad\quad 0=0 \quad L_2 \leftarrow L_2-4L_1 \end{cases} \iff y=-2x+8$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_3) est $\{(x\,;-2x+8) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+y-2z=1 \\ -x+y+3z=4 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x-y+2z=2 \\ x+y-3z=-1 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x+y+z=6 \\ \qquad -2y=-4 \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ \qquad -2z=-6 \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2+3=6 \\ \qquad\quad -y=2 \\ \qquad\quad z=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $(1\,;2\,;3)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+z=5 \\ -3y-4z=-9 \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad 3y+4z=9 \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z=5 \\ -3y-4z=-9 \\ \qquad\qquad 0=0 \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

La dernière équation étant toujours vraie,

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+z=5 \\ \quad -3y-4z=-9 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2\left(-\frac{4}{3}z+3\right)+z=5 \\ \quad y=-\frac{4}{3}z+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{5}{3}z-1 \\ y=-\frac{4}{3}z+3 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\left\{\left(\frac{5}{3}z-1\,;-\frac{4}{3}z+3\,;z\right) \mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

$$(S_3) \iff \begin{cases} x-y+2z=2 \\ \quad 2y-5z=-3 & L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ \quad 4y-10y=-5 & L_3\leftarrow L_3-3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=2 \\ \quad 2y-5z=-3 \\ \quad\quad 0=1 & L_3\leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

On aboutit à un système incompatible donc l'ensemble des solutions de (S_3) est $\varnothing$.

Exercice 5. Déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 3x-2y+5z=1 \\ -x+y+2z=3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+4y+z=3 \\ -x+3y-\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x-y+z=2 \\ 2x+2y-2z=4 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -5y+2z=7 & L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ \quad 2y+3z=1 & L_3\leftarrow L_3+L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -5y+2z=7 \\ \quad\quad \frac{19}{5}z=\frac{19}{5} & L_3\leftarrow L_3+\frac{2}{5}L_2 \end{cases}$$

Il y a 3 pivots (1, -5, et $\frac{19}{5}$) donc $\mathrm{rg}(S_1)=3$. On en déduit que (S_1) est un système de Cramer donc il admet exactement une solution.

$$(S_2) \iff \begin{cases} 2x+4y+z=3 \\ 2x-6y+z=-1 & L_2\leftarrow -2L_2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+4y+z=3 \\ \quad -10y \quad =-4 & L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ \quad -5y \quad =-2 & L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+4y+z=3 \\ \quad -10y \quad =-4 \\ \quad\quad\quad 0=0 & L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et -6) donc $\mathrm{rg}(S_2)=2$. Comme la dernière équation de compatibilité est vraie, on en déduit que le système à une infinité de solutions.

$$(S_3) \Longleftarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad\quad 0=3 & L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ \quad\quad 0=2 & L_3\leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

Il y a 1 seul pivot (1) donc $\mathrm{rg}(S_3)=1$. De plus, les deux équations de compatibilité sont fausses donc (S_3) ne possède aucune solution.

Exercice 6. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

- $\det(A) = 2 \times 3 - 6 \times 0$ donc A n'est pas inversible.
- $\det(B) = 1 \times 5 - 1 \times 4 = 5 - 4 = 1$ donc B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- La matrice C n'est pas carrée donc elle n'est pas inversible.
- $\det(D) = (1+\mathrm{i}) \times 1 - (-\mathrm{i}) \times \mathrm{i} = 1 + \mathrm{i} - 1 = \mathrm{i} \neq 0$ donc D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{-\mathrm{i}}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.
- La matrice E est triangulaire supérieure et tous ses termes diagonaux sont non nuls donc elle est inversible.

  Soit a, b et c trois réels. Considérons le système

$$(S_E) \begin{cases} x + y - z = a \\ 2y + 2z = b \\ 2z = c \end{cases}.$$

  Alors,

$$(S_E) \iff \begin{cases} x + y - \frac{c}{2} = a \\ 2y + c = b \\ z = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = a + \frac{c}{2} \\ y = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ z = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - \frac{b}{2} + c \\ y = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ z = \frac{c}{2} \end{cases}$$

  donc $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- Soit a, b et c trois réels. Considérons le système

$$(S_F) \begin{cases} -x + y + 2z = a & L_1 \\ 2x + y = b & L_2 \\ 3y + 4z = c & L_3 \end{cases}.$$

  Alors,

$$(S_F) \iff \begin{cases} -x + y + 2z = a & L_1 \\ 3y + 4z = b + 2a & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 3y + 4z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = a & \\ 3y + 4z = b + 2a & \\ 0 = c - b - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

  Ainsi, $\mathrm{rg}(F) = 2$ (puisqu'il y a 2 pivots) donc F n'est pas inversible.

- Soit a, b et c trois réels. Considérons le système

$$(S_G)\ \begin{cases} x+2y+3z=a & L_1 \\ 4x+5y+6z=b & L_2 \\ 7x+8y+9z=c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_G) \iff \begin{cases} x+2y+3z=a & L_1 \\ -3y-6z=b-4a & L_2 \leftarrow L_2-4L_1 \\ -6y-12z=c-7a & L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=a & \\ -3y-6z=b-4a & \\ 0=c+a-2b & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(G)=2$ (puisqu'il n'y a que 2 pivots) donc G est n'est pas inversible.

- Soit a, b et c trois réels. Considérons le système

$$(S_H)\ \begin{cases} y+z=a & L_1 \\ x+z=b & L_2 \\ x+y=c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S_H) \iff \begin{cases} x+z=b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ y+z=a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ x+y=c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=b & L_1 \\ y+z=a & L_2 \\ y-z=c-b & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=b & L_1 \\ y+z=a & L_2 \\ -2z=c-b-a & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(H)=3$ (puisqu'il y a 3 pivots) donc H est inversible.

$$(S_H) \iff \begin{cases} x+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=b \\ y+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=a \\ z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} \\ y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2} \\ z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $H^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.