Feuille de calcul n°2 — Systèmes et inverses de matrices

Exercice 1. Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode qui vous semble la plus adaptée.

$$(S_1)\begin{cases}7x-3y=1\\ y=2\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x+y=1\\ 2x-4y=-14\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x-2y=1\\ -3x+6y=1\end{cases}\qquad (S_4)\begin{cases}2x+3y=2\\ -x-1{,}5y=1\end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}2x+y-z=5\\ \qquad 2y+3z=-2\\ \qquad\qquad 3z=4\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}x+2y+4z=1\\ \qquad\qquad 3z=6\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}2x+y-2z=4\\ \qquad 3y-z=8\\ \qquad\qquad 0=2\end{cases}$$

Exercice 3. Échelonner puis résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases}5x-3y=2\\ x-2y=-8\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=0\\ \sqrt{6}x-3y=1\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=2\\ 2x+y=8\end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\begin{cases}x+y+z=6\\ x-y+z=2\\ x+y-z=0\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}x+2y+z=5\\ 2x+y-2z=1\\ -x+y+3z=4\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x-y+2z=2\\ x+y-3z=-1\\ 3x+y-4z=1\end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}x+y+z=-2\\ 3x-2y+5z=1\\ -x+y+2z=3\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}2x+4y+z=3\\ -x+3y-\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}\\ 2x-y+z=1\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x+y-z=1\\ -x-y+z=2\\ 2x+2y-2z=4\end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant :

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\6&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&1&0\\0&3&4\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$