Corrigés de la feuille de calcul n°1

Exercice 1.

a) (u_n) est définie à partir du rang 0. Les trois premiers termes sont $u_0 = -0^2 + 0 + 1 = 1$, $u_1 = -1^2 + 1 + 1 = 1$ et $u_2 = -2^2 + 2 + 2 = 0$.

b) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n - 3 \neq 0$ i.e. $n \neq 3$. Puisque l'énoncé demande un rang à partir duquel (u_n) est définie, on peut dire que (u_n) est définie à partir du rang 4. Dans ce cas, les trois premiers termes sont $u_4 = \frac{1}{4-3} = 1$, $u_5 = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$ et $u_6 = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$.

c) (u_n) est définie pour tout entier n tel que $n^2 - 4 \geqslant 0$ i.e. $n \geqslant 2$. Les trois premiers termes sont $u_2 = \sqrt{2^2 - 4} = 0$, $u_3 = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$ et $u_4 = \sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 2.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.
2. On a :

$$u_n + 1 = \frac{n}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n+1} = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n-1} = \frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n-1+1} = \frac{n-1}{n}$$

Exercice 3. a) $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 + u_0 = 1 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + u_1 = 2^2 + 2 = 6$.

b) $u_5 = 1$, $u_6 = u_{5+1} = u_5 - 5 = 1 - 5 = -4$, $u_7 = u_{6+1} = u_6 - 6 = -10$.

c) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $u_3 = \frac{u_2}{u_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Exercice 4.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1$, $u_1 = u_{0+1} = u_0^2 - 5 \times 0 = 1^2 - 0 = 1$ et $u_2 = u_{1+1} = u_1^2 - 5 \times 1 = 1^2 - 5 = -4$.
2. Par définition, $u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = u_{n+1}^2 - 5(n+1)$. Or, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$ donc $u_{n+2} = (u_n - 5n)^2 - 5(n+1) = u_n^2 - 2 \times u_n \times 5n + (5n)^2 - 5n - 5 = u_n^2 - 10nu_n + 25n^2 - 5n - 5$.

Exercice 5.

1. Par définition, $a_1 = \frac{3a_0+2b_0}{5} = \frac{3\times1+2\times2}{5} = \frac{7}{5}$ et $b_1 = \frac{2\times a_0+3\times b_0}{5} = \frac{2\times1+3\times2}{5} = \frac{8}{5}$.
   De même, $a_2 = \frac{3a_1+2b_1}{5} = \frac{3\times\frac{7}{5}+2\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{37}{25}$ et $b_2 = \frac{2\times a_1+3\times b_1}{5} = \frac{2\times\frac{7}{5}+3\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{38}{25}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{3a_n + 2b_n}{5} + \frac{2a_n + 3b_n}{5} \\ &= \frac{3a_n + 2b_n + 2a_n + 3b_n}{5} = \frac{5a_n + 5b_n}{5} = a_n + b_n = s_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc (s_n) est constante.

3. Par définition, $s_0 = a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3$. Comme (s_n) est constante, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 3$ i.e. $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 6.

1. a. Par définition, $u_2 = u_{0+2} = 2u_{0+1} - u_0 = 2u_1 - u_0 = 2 \times 1 - 0 = 2$. De même, $u_3 = 2u_2 - u_1 = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $u_4 = 2u_3 - u_2 = 2 \times 3 - 2 = 4$.

b. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d_{n+1} = u_{(n+1)+1} + u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$. Or, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ donc $d_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = d_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n$ donc (d_n) est constante.

b. Par définition, $d_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ donc, comme (d_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$ i.e. $u_{n+1} - u_n = 1$ et donc $u_{n+1} = u_n + 1$.

c. La suite (u_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.