Feuille de calcul n°1 — Calcul sur les suites réelles

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie et calculer les 3 premiers termes de la suite.

a) $u_n = -n^2 + n + 1$ b) $u_n = \dfrac{1}{n-3}$ c) $u_n = \sqrt{n^2 - 4}$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_n + 1$, u_{n+1}, $u_n - 1$ et u_{n-1} en fonction de n.

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n)

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_5 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 5,\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \end{cases}$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$.

1. Calculer les 3 premiers termes de (u_n).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

Exercice 5. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2b_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3b_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$. Démontrer que la suite (s_n) est constante.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 - a_n$.

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. **a.** Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Quelle conjecture peut-on faire ?

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que (d_n) est constante.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.

c. En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**.